

UNIVERSITE DE PARIS

FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY

THESES

présentées pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES-SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Jacqueline DETRAZ

1ère thèse : Algèbres uniformes de fonctions analytiques dans le disque

2ème thèse : Semi-groupes de mesures complexes

Soutenues le juin 1970 devant la commission d'examen

J. Deny, Président

J.-P. Kahane	} Examineurs
J. Combes	
A. Bernard	

UNIVERSITE DE PARIS

FACULTE DES SCIENCES D'ORFÈVRE

THÈSE

Digitized by the Internet Archive
in 2026

JEAN-LOUIS DETAIL

J. L. Detail

J. L. Detail

J. L. Detail

J. L. Detail

J. L. Detail

UNIVERSITE DE PARIS

FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY

THESES

présentées pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES-SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Jacqueline DETRAZ

1ère thèse : Algèbres uniformes de fonctions analytiques dans le disque

2ème thèse : Semi-groupes de mesures complexes

Soutenues le juin 1970 devant la commission d'examen

J. Deny, Président

J.-P. Kahane	}	Examineurs
J. Combes		
A. Bernard		

UNIVERSITE DE PARIS

FACULTE DES SCIENCES D'ORLÈANS

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN SCIENCES MATHÉMATIQUES



Jacques GÉRAUD

Thèse présentée à l'Université de Leiden pour obtenir le grade de
Docteur en Sciences Mathématiques

Leiden le 15 Mars 1970

J. G. Géraud
J. G. Géraud
J. G. Géraud
J. G. Géraud

Table des matières

Introduction	1
Notations et définitions	6
Chapitre I. Sous-algèbres d'une algèbre de Banach commutative A , définies par une relation d'équivalence sur le spectre de A	9
Chapitre II. Sous-algèbres de codimension finie d'une algèbre de Banach commutative	22
Chapitre III. Sommes d'idéaux dans les algèbres de Banach	34
Chapitre IV. Extensions analytiques d'algèbres de restrictions de l'algèbre $H^{\infty}(D)$	44
Chapitre V. Etude de l'algèbre $H_E(D)$	63
Chapitre VI. Comparaison d'algèbres de restrictions de sous-algèbres de $H^{\infty}(D)$	87
Bibliographie	109

Introduction

C'est à partir de l'étude d'un exemple particulier d'une algèbre de fonctions analytiques que m'avait proposé J.-P. Kahane que j'ai été amenée à étudier les algèbres uniformes (i. e. les sous-algèbres fermées, séparant des points, contenant les constantes de l'algèbre des fonctions continues sur un compact X).

Cette étude m'a conduit d'une part à étudier divers problèmes dans le cadre général des algèbres uniformes et, d'autre part, surtout, à aborder certains problèmes d'analyse assez fine.

Ce travail comporte donc deux parties :

Dans la première partie (chapitres I, II et III), je considère le problème suivant :

Si on se donne une algèbre uniforme (ou de Banach) A , que peut-on dire des sous-algèbres de A ? Quel est le spectre de telles sous-algèbres ?

J'aborde ce problème pour deux classes particulières de sous-algèbres B d'une algèbre de Banach A :

D'une part, celles qui sont définies par une relation d'équivalence sur SpA , je donne des conditions pour que l'application canonique de SpA dans SpB soit surjective. J'étudie

aussi comment des propriétés particulières de A se transmettent à B .

D'autre part, les sous-algèbres de codimension finie, je les caractérise comme noyaux d'homomorphismes ou de dérivations d'ordre supérieur ou égal à 1. Une étude analogue a été faite par Gamelin. Je montre aussi qu'une dérivation en un point m de SpA n'est pas toujours limite de différence d'homomorphismes en des points voisins.

J'étudie dans le chapitre III la somme d'idéaux fermés d'une algèbre A de Banach. Je donne des conditions pour qu'une telle somme soit fermée, cela m'amène à l'étude des ensembles particuliers de SpA (clos, d'interpolation, pic, fermé-Zariski) et en particulier de l'union de tels ensembles. Ce genre de problème a été souvent abordé, par exemple dans des articles de Gamelin et Glicksberg.

J'obtiens, par exemple, le fait que l'union d'un ensemble pic et d'un ensemble clos est clos et je réponds à un problème posé par Gamelin.

La seconde partie (chapitres IV, V et VI) est consacrée à l'étude de certaines sous-algèbres et d'algèbres de restrictions de l'algèbre $H^\infty(D)$ des fonctions analytiques bornées dans le disque unité D .

En ce qui concerne l'algèbre de restrictions $H^\infty(D)|_S$ de $H^\infty(D)$ à une suite de Blaschke S , si on note E l'ensemble des points d'accumulation de S , alors il existe un ouvert O contenant $\bar{D} \setminus E$ tel que

$$H^\infty(O)|_S = H^\infty(D)|_S.$$

Je généralise ainsi des résultats de E. Akutowicz - L. Carleson et A. Heard - J. Wells.

Je définis alors les algèbres $H_E(D)$ qui sont formées de fonctions de $H^\infty(D)$ qui se prolongent continuellement à un ensemble E du cercle unité. De telles algèbres sont définies par une relation d'équivalence sur $\text{SpH}^\infty(D)$ et je réponds par l'affirmative au problème (posé dans un cadre général dans le chapitre I) de savoir si l'application canonique de $\text{SpH}^\infty(D)$ dans $\text{SpH}_E(D)$ est surjective. Pour cela j'étudie la frontière de Silov de $H_E(D)$ en généralisant la méthode utilisée par Newman pour $H^\infty(D)$ et j'obtiens une caractérisation par les produits de Blaschke analogue à celle de $H^\infty(D)$. J'obtiens alors le fait que D est dense dans $\text{SpH}_E(D)$ en utilisant le théorème de Carleson qui dit que D est dense dans $\text{SpH}^\infty(D)$.

Le chapitre VI est motivé par l'étude des algèbres $\tilde{A}$ pour les algèbres restrictions des algèbres uniformes :

: A étant une algèbre de Banach de fonctions continues sur un compact X , on définit

$$\tilde{A} = \left\{ f ; f \in \mathcal{C}(X), \exists M ; \exists f_n \in A ; \|f_n\|_A < M ; f_n - f \longrightarrow 0 \text{ uniformément sur } K \right\}.$$

Il s'agit d'étudier l'inclusion $A \subset \tilde{A}$ dans le cas qui nous intéresse des algèbres de restrictions d'algèbres uniformes. Je l'étudie ici pour les algèbres quotients de l'algèbre $A(D)$ des fonctions analytiques sur D , continues sur $\bar{D}$.

K étant un fermé de $\bar{D}$, je compare donc les trois algèbres :

l'algèbre $A(K)$ des restrictions de $A(D)$ à K

l'algèbre $\tilde{A}(K)$ correspondant à $A(K)$ par la définition ci-dessus

l'algèbre $B(K)$ formée des fonctions f de $\mathcal{C}(K)$ telles que $f|_{K \cap D}$ soit dans $H^\infty(D)|_{K \cap D}$.

J'obtiens des résultats de deux types différents suivant que K est "gros" ou "mince".

Par exemple, si $m(K \cap T)$ est positive, $A(K) = B(K)$ si et seulement si presque tout point de T est adhérent non tangentiellement à $K \cap T$ et $A(K) = \tilde{A}(K)$ si et seulement si K contient T .

Si, au contraire, $m(K \cap T)$ est nulle et $K \cap D$ est une suite de Blaschke $S = \{\alpha_n ; n \in \mathbb{N}\}$ on a toujours $\tilde{A}(K) = B(K)$ et $\tilde{A}(K)$ est égal à $A(K)$ si et seulement si S est une suite d'interpolation pour $H^\infty(D)$.

Pour cela, j'utilise le fait que les fonctions f de $A(K)$ nulles sur $K \cap T$ sont caractérisées par le fait que $\|f\|_{H^\infty(D)|_{S_n}}$ tende vers zéro lorsque n tend vers ∞ , S_n étant la suite $\{\alpha_p ; p > n\}$.

Je compare aussi dans ce cas les spectres de $\tilde{A}(K)$ et de $A(K)$. Je montre que l'application $\text{Sp}\tilde{A}(K)$ dans $\text{Sp}A(K)$ est toujours surjective mais est suivant le cas injective ou pas.

Le résultat final est que $A(K) = \tilde{A}(K)$ si et seulement si $A(K)$ est une algèbre uniforme sur K .

Je veux exprimer ici toute ma reconnaissance à M. Kahane qui m'a amenée à m'intéresser aux algèbres uniformes et qui tout au long de mon travail m'a suivie et encouragée.

Je suis heureuse de dire toute ma gratitude à Nicolas Varopoulos dont les conseils et le soutien m'ont été très précieux.

J'ai eu avec Alain Bernard de nombreuses et stimulantes conversations, je l'en remercie

amicalement.

M. Deny a bien voulu me proposer un second sujet de thèse, M. Combès s'est intéressé à mon travail, je leur en suis très reconnaissante.

Je remercie également Mme Dumas pour la compétence et la gentillesse avec lesquelles elle a assuré la frappe de ce manuscrit.

Je dédie ce travail à la mémoire de ma mère qui m'a donné, en particulier, le goût des mathématiques.

Notations et Définitions

1. Etant donné un espace topologique X , nous noterons $\mathcal{C}(X)$ (resp. $\mathcal{C}_b(X)$) l'espace de toutes les fonctions continues (resp. continues bornées) sur X , à valeurs complexes.

2. Etant donnée une algèbre de Banach commutative, nous noterons $\|a\|_A$ la norme d'un élément a de A , $\text{Sp } A$, le spectre de A (i.e. l'ensemble des homomorphismes non nuls de A dans $\mathbb{C}$), et $\text{Sp } a$, le spectre d'un élément a de A (i.e. l'ensemble $\{m(a), m \in \text{Sp } A\}$).

La transformation de Gelfand est l'application qui à tout élément a de A associe la transformée de Gelfand $\hat{a}$ de $\mathcal{C}$ ($\hat{a}$ est une fonction définie sur $\text{Sp } A$ par $\hat{a}(m) = m(a)$ pour tout m de $\text{Sp } A$) ; on note $\hat{A}$ l'ensemble $\{\hat{a} ; a \in A\}$ et on munit $\text{Sp } A$ de la topologie définie par les fonctions $\hat{a}$.

3. Etant donné un idéal I de A , on note $\text{Hull}_A(I)$ (ou $\text{Hull } I$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté) l'ensemble $\{m ; m \in \text{Sp } A, m(a) = 0 \text{ pour tout } a \text{ de } I\}$. Etant donné un ensemble K de $\text{Sp } A$, on note I_K l'ensemble $\{a ; a \in A, \hat{a}(m) = 0 \text{ pour tout } m \text{ de } K\}$.

4. L'adhérence Zariski $\tilde{K}$ d'un ensemble K de $\text{Sp } A$ est l'ensemble $\text{Hull } I_K$. $\tilde{K}$ est donc l'ensemble des points m de $\text{Sp } A$ qui annulent tout élément a telle que $\hat{a}$ soit nulle sur K .

Si $K = \tilde{K}$, K est dit fermé-Zariski

Si tout fermé de $\text{Sp}A$ est fermé-Zariski, A est dite régulière

5. Etant donné un idéal I de A , l'algèbre quotient A/I est une algèbre de Banach (munie de la norme quotient) et son spectre est $\text{Hull } I$.

6. Une algèbre uniforme sur un espace compact X est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X)$, fermée pour la norme uniforme sur X , contenant les constantes et séparant les points. Munie de la norme uniforme sur X , c'est une algèbre de Banach.

On a alors canoniquement un homéomorphisme de X sur une partie de $\text{Sp}A$. La transformation de Gelfand est une isométrie $\|a\|_A = \sup_{m \in \text{Sp}A} |\hat{a}(m)|$. Une algèbre de Banach est dite uniforme s'il existe un compact X tel que A soit isomorphe isométriquement à une algèbre uniforme sur X .

7. Etant donnée une algèbre uniforme A sur X , Silov A désigne la frontière de Silov de A , i. e. le plus petit ensemble fermé de $\text{Sp}A$ sur lequel tout élément $\hat{a}$ de A atteint son maximum en module. On a canoniquement un homéomorphisme de Silov A sur une partie de X . Une algèbre uniforme A peut être canoniquement considérée comme algèbre uniforme sur tout espace compact X tel que $\text{Silov } A \subseteq X \subseteq \text{Sp}A$.

8. Etant donnée une algèbre uniforme A sur X , un ensemble K de X est dit pic si pour tout voisinage V de K dans X il existe un élément a de A tel que :

$$\|a\|_A = 1$$

$$a(x) = 1 \text{ pour } x \text{ dans } K$$

$$|a(x)| < 1 \text{ pour } x \text{ dans } X \setminus V$$

Si K est un point, on l'appelle point pic.

9. Etant donnés une algèbre uniforme A sur X et un ensemble K de X , on note $f|_K$ la restriction d'un élément f de A à K et $A|_K$ l'algèbre des restrictions de A à K . $A|_K$ peut être identifiée avec l'algèbre quotient A/I_K ; $A|_K$ est donc, munie de la norme quotient une algèbre de Banach :

$$\|f\|_{A|_K} = \inf \{ \|F\|_A ; F \in A ; F|_K = f \} \text{ pour tout } f \text{ de } A|_K.$$

K est dit clos si $A|_K$ est uniforme sur K .

K est dit d'interpolation si $A|_K = \mathcal{C}(K)$.

10. Etant donnée une algèbre uniforme A , pour tout point m de $\text{Sp}A$ il existe une mesure représentante, i. e. une mesure μ_m positive, de masse 1, dont le support est contenu dans Silov A telle que

$$\int_{\text{Silov } A} \hat{a} d\mu_m = m(a) \text{ pour tout } a \text{ de } A.$$

Dans ce qui suit, une référence au théorème III.2, par exemple, est une référence qui renvoie au théorème 2 du chapitre III de ce travail, et la notation N.6 renvoie au paragraphe 6 ci-dessus.

Chapitre I

Sous-algèbres d'une algèbre de Banach / A, ^{commutative} définies par une relation d'équivalence sur le spectre de A.

1. Soient A une algèbre de Banach unitaire commutative,

$\text{Sp } A$ le spectre de A , compact pour la topologie de Gelfand,

R une relation d'équivalence sur $\text{Sp } A$,

B la sous-algèbre de A formée des éléments b de A , dont les transformées de Gelfand $\hat{b}$ sont constantes sur chaque classe d'équivalence de R .

Remarquons tout d'abord que B est une algèbre de Banach unitaire ; nous allons principalement étudier le spectre de B et aussi déterminer si des propriétés particulières de A se transmettent à B .

On note π l'application canonique de $\text{Sp } A$ dans $\text{Sp } B$ qui à chaque homomorphisme sur A associe sa restriction à B et $\text{Sp } A/R$ l'espace quotient de $\text{Sp } A$ par la relation R .

Tout d'abord, remarquons que B , comme toute sous-algèbre de A définit une relation $\tilde{R}$ d'équivalence sur $\text{Sp } A$:

$$m \tilde{R} m' \iff \hat{b}(m) = \hat{b}(m'), \text{ pour tout } b \text{ de } B.$$

B peut être alors définie aussi bien à partir de $\tilde{R}$ que de R comme l'algèbre formée des

des éléments de A dont les transformées de Gelfand sont constantes sur chaque classe de $\tilde{R}$ ou de R . Il existe une injection canonique de $SpA/\tilde{R}$ sur SpB ; dire que π est surjective est équivalent à dire que $SpB = SpA/\tilde{R}$. La relation d'équivalence $\tilde{R}$ a des propriétés particulières, par exemple chaque classe de $\tilde{R}$ est fermée-Zariski [cf. N.4].

Donc si R est une relation d'équivalence donnée de façon quelconque, la relation $\tilde{R}$ est différente de R .

On peut donc se poser les deux problèmes suivants :

1. A quelles conditions $\tilde{R} = R$? En d'autres termes R étant une relation d'équivalence donnée sur SpA , à quelles conditions existe-t-il une sous-algèbre B de A telle que R soit définie par B ?

Une condition suffisante par exemple est que R n'ait qu'un nombre fini de classes non réduites à un point, ces n classes étant fermées-Zariski.

2. A quelles conditions l'application π de $SpA \longrightarrow SpB$ est-elle surjective ? C'est ce problème que nous allons aborder dans la suite.

2. Condition de surjectivité de l'application canonique $SpA \longrightarrow SpB$.

On se place tout d'abord dans le cadre plus général des sous-algèbres quelconques d'une algèbre de Banach commutative.

Définition 1. Soit A une algèbre de Banach unitaire d'unité e . B une sous-algèbre fermée de A ; on appelle conducteur de A dans B l'ensemble $I = \{a ; a \in A, aA \subset B\}$.

I est un idéal de A inclus dans B . π désignant toujours l'application canonique

$\text{Sp}A \rightarrow \text{Sp}B$ on a la proposition immédiate suivante, simple conséquence du théorème de

Zorn :

Proposition 1. J étant un idéal propre maximal de B , les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

P_1 : J est contenu dans un idéal maximal propre de A .

P_2 : quels que soient les éléments $a_1 \dots a_n$ dans A et $b_1 \dots b_n$ dans J , alors :

$$\sum_1^n a_p b_p \neq e, \quad e \text{ étant l'unité de } A.$$

D'autre part, π est surjective si et seulement si P_1 est vérifiée pour tous les idéaux maximaux J de B .

Proposition 2. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) l'application canonique $\text{Sp}A \rightarrow \text{Sp}B$ est surjective
- (ii) l'application canonique $\text{Sp}A/I \rightarrow \text{Sp}B/I$ est surjective
- (iii) $\text{Hull}_B(I) \subset \pi(\text{Sp}A)$.

[cf. N.3] Comme $\text{Sp}A/I$ (resp. $\text{Sp}B/I$) est égal à $\text{Hull}_A(I)$ (resp. $\text{Hull}_B(I)$)

on a évidemment $(i) \Rightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$.

Supposons donc (ii) vérifiée et soit J un idéal maximal propre de B et β l'homomorphisme sur B associé à J .

Si J ne contient pas I , il existe c dans I tel que $\beta(c) \neq 0$. En utilisant les notations de la propriété P_2 dans la proposition 1, supposons que $\sum_1^n a_p b_p$ soit égal à e ; c étant dans le conducteur de A dans B on peut écrire :

$$0 \neq \beta(c) = \beta\left(\left(\sum_1^n a_p b_p\right)c\right) = \beta(a_p c) \beta(b_p) = 0$$

d'où une contradiction et $\sum_1^n a_p b_p \neq e$. P_2 est vérifiée.

Si J contient I , β définit sur SpB/I un homomorphisme qui, étant donné que (ii) est vérifiée, est la restriction à SpB/I d'un homomorphisme sur A/I ; β est donc la restriction à B d'un homomorphisme sur A . P_1 est vérifiée et la proposition 2 est démontrée.

Cette proposition présente un intérêt dans le cas où I est "gros" et donc où (ii) est plus facile à vérifier que (i). Revenons, par exemple, au cas d'une sous-algèbre B de A donnée par une relation d'équivalence R . Soit K l'union des classes de $\tilde{R}$ non réduites à un point; on vérifie que le conducteur I de B dans A est l'idéal I_K des éléments a de A tels que $\hat{a}$ soit nul sur K et $Hull_B(I)$ est l'adhérence Zariski [N.4]. $\tilde{\pi}(K)$ de $\pi(K)$ dans SpB . On a donc les corollaires suivants de la proposition 2.

Corollaire 1. Si $\tilde{R}$ n'a qu'un nombre fini de classes non réduites à un point, π est surjective.

En effet dans ce cas $\pi(K)$ est fini et donc fermé Zariski; donc (iii) est vérifiée.

Corollaire 2. Si K est un fermé d'interpolation (i.e. $\hat{A}|_K = \mathcal{C}(K)$), π est surjective.

En effet, dans ce cas on a aussi $\hat{B}|_{\pi(K)} = \mathcal{C}(\pi(K))$ donc $Sp\hat{B}|_{\pi(K)} = Sp\mathcal{C}(K)$ soit

$\tilde{\pi}(K) = \pi(K)$ (iii) est vérifiée.

Corollaire 3. (signalé par A. Bernard). Si $B|_{\pi(K)} = \mathcal{C}_b(\pi(K))$, π est surjective.

$\text{Sp}\mathcal{E}_b(\pi(K))$ est l'adhérence topologique de $\pi(K)$ dans $\text{Sp}B$ donc $\widetilde{\pi(K)} = \overline{\pi(K)} \subset \pi(\text{Sp}A)$

(ii) est vérifiée.

3. Proposition 3. L'application π de $\text{Sp}A$ dans $\text{Sp}B$ n'est pas toujours surjective.

Cette proposition a été démontrée par J. P. Rosay [25] qui a donné un exemple dans

$\mathbb{C}^2$. Nous donnons ici un exemple analogue.

Soit C le compact de $\mathbb{C}^2$ défini par $C = \{z_1, z_2 ; \frac{1}{2} \leq |z_i| \leq 1, i = 1, 2\}$. Ce compact peut être recouvert par n polydisques D_p centrés en des points de C et de rayon $\frac{1}{4}$. Soit K' l'union des polydisques D_p , $p \leq n$, K' contient C et ne contient pas l'origine.

Considérons maintenant n polydisques D_p centrés sur l'axe $z_1 = 0$, disjoints.

Soit $K = \bigcup_{p \leq n} D_p$.

On définit $A = A(K) = \{f ; f \in \mathcal{E}(K) ; f \text{ holomorphe sur } \overset{\circ}{K}\}$ et de même $A(K')$.

Ce sont deux algèbres de Banach ; le spectre de $A(K)$ est K . Quant au spectre de $A(K')$, $\overset{\circ}{K'}$ "entourant" l'origine, toute fonction de $A(K')$ se prolonge en une fonction holomorphe à l'origine. 0 appartient donc au spectre de $A(K')$.

Considérons maintenant l'application F de K sur K' définie par $F|_{D_p} = F_p$, $p \leq n$, où F_p est l'isomorphisme naturel entre D_p et D'_p ; soit R la relation d'équivalence sur K définie par F . Considérons l'algèbre B correspondante, définie par R .

Il est clair que l'application qui à f dans $A(K')$ fait correspondre $f \circ F$ dans B est un isomorphisme entre $A(K')$ et B .

Donc $\text{Sp}B = \text{Sp}A(K')$ et l'application F s'identifie à l'application canonique de $\text{Sp}A$ dans $\text{Sp}B$. Or l'origine appartient à $\text{Sp}B$ et non à $\pi(\text{Sp}A) = K'$. Donc π n'est pas surjective.

Dans cet exemple où l'algèbre A est définie dans $\mathbb{C}^2$ et R est définie par une application F de $\text{Sp}A$ dans $\mathbb{C}^2$ (i. e. $mRm' \iff F(m) = F(m')$) la non surjectivité de l'application canonique $\text{Sp}A \longrightarrow \text{Sp}B$ est une conséquence du fait que tout ouvert de $\mathbb{C}^2$ n'est pas forcément un domaine d'holomorphie : on peut penser que dans $\mathbb{C}$ où tout ouvert est un domaine d'holomorphie cette situation de non surjectivité ne peut se produire et on peut alors poser les deux problèmes suivants :

1) A étant une algèbre quelconque, R une relation d'équivalence sur $\text{Sp}A$ définie par un élément a de A (i. e. $mRm' \iff \hat{a}(m) = \hat{a}(m')$), π est-elle surjective ?

2) A étant l'algèbre $A(D)$ formée des fonctions analytiques dans le disque unité ouvert D , continues sur $\bar{D}$, R une relation d'équivalence quelconque, π est-elle surjective ?

Des réponses partielles ont été données à ces deux problèmes :

A. Bernard a montré que si A est une algèbre uniforme, R une relation d'équivalence définie par un élément a , π est surjective si $\text{Sp}a$ est d'intérieur non vide ou s'il existe une famille $\{\psi_i, i \in I\}$ d'applications de D dans $\text{Sp}A$ telle que $A = \{f; f \in \mathcal{C}(\text{Sp}A), f \circ \psi_i \text{ analytique pour tout } i\}$.

J.-P. Rosay a démontré pour l'algèbre $A(D)$ [26] que si R est une relation

d'équivalence sur $\bar{D}$ définie par n fonctions de $A(D)$ dont l'une non constante est analytique au voisinage de $\bar{D}$, π est surjective.

Il faut aussi signaler le résultat suivant de A. Browder et J. Wermer [2]. Soit A une algèbre uniforme sur un espace compact X , G un groupe d'homéomorphismes de $\text{Sp}A$ sur $\text{Sp}A$ tel que pour tout f dans A et g dans G , $f \circ g$ est dans A . Notons R la relation d'équivalence dont les classes sont les orbites de G , B la sous-algèbre de A associée à R , i. e. $B = \{f ; f \in A, f = f \circ g \text{ pour tout } g \text{ dans } G\}$. Alors si G est fini ou compact, π est surjective.

Enfin, nous verrons au chapitre V, un exemple de surjectivité n'entrant pas dans le cadre des propositions ci-dessus.

4. Propriétés de B. Dans toute cette partie, on suppose que $\tilde{R}$ n'a qu'un nombre fini de classes K_i , ($i \leq n$) non réduites à un point. On a donc $\text{Sp}B \simeq \text{Sp}A/\tilde{R}$. Nous pouvons étudier les propriétés de B à partir de celles de A . Ainsi supposons, par exemple, A régulière, on vérifie que B l'est.

Définition 2. Un fermé F de $\text{Sp}A$ est de synthèse si tout élément de A dont la transformée de Gelfand est nulle sur F peut être approché dans A par des éléments dont les transformées de Gelfand sont nulles dans des voisinages de F .

A est dite de synthèse si tout fermé de $\text{Sp}A$ l'est.

Proposition 4. Si A est une algèbre régulière de synthèse, B est de synthèse.

Soit F un fermé de $\text{Sp}B$. Notons $E = \pi^{-1}(F)$. E est un fermé de $\text{Sp}A$ saturé pour $\tilde{R}$, on peut donc supposer que

$$E \cap K_i = \emptyset, \quad i \leq p$$

$$E \supset K_i \quad p < i \leq n.$$

Or A étant régulière, unitaire d'unité e , il existe c_0 dans A , $\hat{c}_0 = 0$ sur

$$\bigcup_{i \leq p} K_i, \quad \hat{c}_0 = 1 \quad \text{sur un voisinage de } E.$$

Soit maintenant un élément b dans B dont la transformée de Gelfand est nulle sur F ; sa transformée de Gelfand dans A , $\hat{b}$ est nulle sur E . E étant de synthèse, pour tout ε il existe un élément a de A telle que $\hat{a}$ soit nulle sur un voisinage de E

$$\text{et } \|a - b\|_A < \frac{\varepsilon}{\|c_0\|_A}.$$

$$\text{Posons } d = c_0 a + (e - c_0)b.$$

$$\hat{d} \text{ est nulle sur un voisinage de } E, \quad \hat{d} = \hat{b} \text{ sur } \bigcup_{i \leq p} K_i, \text{ donc } d \text{ est dans } B \text{ et}$$

$$\|b - d\|_B = \|c_0(a - b)\|_A < \varepsilon.$$

En ce qui concerne la frontière de Silov (cf. N.7) on a la proposition suivante.

Proposition 5. $\pi(\text{Silov } A \setminus K) \subset \text{Silov } B \subset \pi(\text{Silov } A).$

L'inclusion $\text{Silov } B \subset \pi(\text{Silov } A)$ est évidente.

Soit maintenant m_0 un point de $\text{Silov } A$ non dans K , soit V un voisinage ouvert de m_0 qu'on peut supposer disjoint de K ; il existe a dans A tel que $\hat{a}(m_0) < 1$
 $m_0 \notin V$ et $\sup_{\text{Sp}A} |\hat{a}(m)| = 1$. En particulier il existe m_1 dans V tel que $\hat{a}(m_1) = 1$. K étant fermé-Zariski, il existe b dans B tel que $\hat{b} = 0$ sur K et $\hat{b}(m_1) = 1$; en prenant n

assez grand on a $|\hat{a}^n(m)| < [\sup_{k \in \text{Sp}A} |\hat{b}(k)|]^{-1}$ si $m \in V$

$\hat{a}^n \hat{b}$ est dans B et on a $\sup_{m \in \text{Sp}A} |\hat{a}^n \hat{b}(m)| \geq \hat{a}^n(m_1) \hat{b}(m_1) = 1$

et $|\hat{a}^n \hat{b}(m)| < 1$ si $m \in V$

$\pi(m)$ appartient donc à $\text{Silov } B$.

Les points $\pi(K_i)$ peuvent ou non appartenir à $\text{Silov } B$.

Si $\pi(K_i)$ n'est pas isolé dans $\pi(\text{Silov } A)$, il appartient à $\text{Silov } B$ qui est fermé.

Si $\pi(K_i)$ est isolé dans $\pi(\text{Silov } A)$ il peut ne pas appartenir à $\text{Silov } B$ comme :

l'exemple suivant le montre.

Soit E le sous ensemble de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ défini par $E = \{\bar{D}, \{0\}\} \cup \{[0, I]\} = K_1 \cup K_2$ où

$\bar{D}$ est le cercle unité fermé et I l'intervalle $[0, 1]$.

Soit A la sous-algèbre de $\mathcal{C}(E)$ telle que

$$A|_{K_2} = \mathcal{C}(K_2)$$

$$A|_{K_1} \sim A(D) \quad (\text{l'algèbre du disque})$$

on voit facilement que $\text{Sp}A = E$ et $\text{Silov } A = \{T, 0\} \cup K_2$, T étant le cercle unité et B

la sous-algèbre de A définie par R .

Soit R la relation d'équivalence qui identifie tous les points de K_2 . B s'identifie à l'algèbre $A(D)$, $\text{Sp}B = \{D, \{0\}\}$ et $\text{Silov } B \cong T$. Le point $\pi(K_2) = (0, 0)$ n'appartient pas à $\text{Silov } B$.

5. Cas des algèbres uniformes

X étant un espace compact, soit A une algèbre uniforme sur X , i.e. une sous-algèbre

fermée de $\mathcal{C}(X)$ séparant les points et unitaire. La transformée de Gelfand est une isométrie et A s'identifie à une algèbre uniforme aussi bien sur $\text{Sp}A$ que sur $\text{Silov } A$; il existe des injections continues telles que $\text{Silov } A \xrightarrow{\subset} X \xrightarrow{\subset} \text{Sp}A$. Réciproquement une algèbre uniforme l'est sur tout espace compact X tel que $\text{Silov } A \xrightarrow{\subset} X \xrightarrow{\subset} \text{Sp}A$.

Au début de ce travail, A étant une algèbre uniforme sur X , on a défini la notion de point pic, d'ensemble pic dans X . Nous allons démontrer le lemme et la proposition suivantes qui établissent les liens entre ^{ces} notions et l'espace X considéré.

Lemme 1. A étant une algèbre uniforme, la notion de point pic est indépendante de l'espace X sur lequel A est définie.

Il suffit de démontrer qu'un point pic dans $\text{Silov } A$ est pic dans $\text{Sp}A$.

Considérons donc un point x pic dans $\text{Silov } A$. Soit y un point de $\text{Sp}A$, $y \neq x$; soit μ_y une mesure représentante (cf. N.10) de y sur $\text{Sp}A$; μ_y est une mesure régulière différente de la mesure de Dirac δ_x en x car A sépare les points de $\text{Sp}A$. Il existe donc un voisinage V_y de x dans $\text{Silov } A$ tel que $\mu_y(\text{Silov } A \setminus V_y) > 0$; x étant pic dans $\text{Silov } A$, il existe f_y telle que $f_y(x) = 1 = \|f_y\|$ et $|f_y| < 1$ sur $\text{Silov } A \setminus V_y$.

$$\text{Alors } f_y(y) = \int_{\text{Silov } A} f_y(z) d\mu_y(z) = \int_{\text{Silov } A \setminus V_y} f_y(z) d\mu_y + \int_{V_y} f_y(z) d\mu_y$$

$$|f_y(y)| < \mu_y(\text{Silov } A \setminus V_y) + \mu_y(V_y) = 1.$$

Soit V un voisinage ouvert de x dans $\text{Sp}A$, d'après ce qui précède et par compacité il existe n points $y_1, \dots, y_n$ dans $\text{Sp}A \setminus V$, n voisinages W_{y_n} de ces points tels que

$\bigcup_{i \leq n} W_{y_i} \supset \text{Sp}A \setminus V$ et n fonctions f_{y_i} $i \leq n$, telles que

$$f_{y_i}(x) = 1 = \|f_{y_i}\| \quad |f_{y_i}| < 1 \quad \text{sur } W_{y_i}.$$

La fonction $f = \prod_{i \leq n} f_{y_i}$ vérifie $f(x) = 1 = \|f\|$, $|f| < 1$ sur $\text{Sp}A \setminus V$, x est donc pic dans $\text{Sp}A$.

Proposition 6. Si K est un fermé de Silov A , pic dans Silov A , si X est un compact de $\text{Sp}A$ contenant Silov A , alors le plus petit ensemble pic dans X contenant K est l'intersection de X avec l'adhérence-Zariski $\tilde{K}$ de K dans $\text{Sp}A$.

D'une part tout ensemble pic dans X contenant K contient $\tilde{K} \cap X$.

D'autre part si F est un ensemble pic dans $\text{Sp}A$, X un compact de $\text{Sp}A$ contenant Silov A , $F \cap X$ est pic dans X . En effet, il suffit de remarquer que tout ouvert O de $\text{Sp}A$ contenant $F \cap X$ contient un ensemble de la forme $O' \cap X$ où O' est un ouvert de $\text{Sp}A$ contenant F .

Il reste donc à montrer que si K est un fermé de Silov A , pic dans Silov A , $\tilde{K}$ est pic dans $\text{Sp}A$. Considérons alors l'algèbre B des fonctions constantes sur $\tilde{K}$, d'après le corollaire I.1, $\text{Sp}B = (\text{Sp}A)/\tilde{K}$ et on a l'équivalence suivante, π désignant l'application canonique $\text{Sp}A \rightarrow \text{Sp}B$:

$$\tilde{K} \text{ pic dans } \text{Sp}A \iff \pi(\tilde{K}) \text{ pic dans } \text{Sp}B.$$

Or K étant pic dans Silov A , $\tilde{K} \cap \text{Silov } A = K$ et $\pi(\tilde{K})$ est donc pic dans $\pi(\text{Silov } A)$.

La proposition est alors une conséquence du lemme I.1 et de l'équivalence ci-dessus.

Définition 3. Une algèbre uniforme A est fondamentale si tout point a a une mesure représentante unique, portée par Silov A .

Remarque 1. En particulier pour tout point de Silov A , la mesure de Dirac doit être la seule mesure représentante ; cette propriété caractérisant [24] les points pics, tout point de Silov A est pic.

Proposition 7. Si A est une algèbre fondamentale, R une relation d'équivalence définie par n classes K_i non réduites à un point, chaque K_i étant pic dans SpA , B est fondamentale.

On peut supposer que R n'a qu'une classe K qui est pic, sinon on considère successivement les algèbres emboîtées

$$A_1 = \{f ; f \in A, \hat{f} \text{ constante sur } K_1\}$$

$$A_2 = \{f ; f \in A, \hat{f} \text{ constante sur } K_1 \text{ et } K_2\} \quad \text{etc...}$$

π désignant toujours l'application canonique de SpA dans SpB , $k = \pi(K)$

est pic dans SpB donc, d'après la remarque I.1 ci-dessus, k a une mesure représentante unique. Considérons alors un point x dans SpB différent de k et μ_x une mesure représentante de x sur Silov B .

Remarquons d'abord que $\mu_x(\{k\}) = 0$; en effet, supposons que $\mu_x(\{k\}) > 0$; la mesure μ_x étant régulière, il existe un voisinage V de k dans SpB ne contenant pas x tel que $\mu_x(V \setminus \{k\}) < \frac{1}{4} \mu_x(\{k\})$; k étant pic, il existe f dans B telle que

$$f(k) = 1 = \|f\| \quad |f| < \frac{1}{4} \mu_x(\{k\}) \quad \text{sur } SpB \setminus V.$$

On a alors

$$\frac{1}{4} \mu_x(\{k\}) > |f(x)| \geq \int_{\text{Silov } B} |f| d\mu_x \geq |f(k)| \mu_x(\{k\}) - \int_{\text{Silov } B \setminus V} |f| d\mu_x - \int_{\text{Silov } B \cap V \setminus \{k\}} |f| d\mu_x$$

soit $\frac{1}{4} \mu_x(\{k\}) \gg \frac{1}{2} \mu_x(\{k\})$ d'où une contradiction.

Notons alors ν_x la mesure sur Silov A définie par $\nu_x(U) = \mu_x(\Pi(U))$ si $U \cap K = \emptyset$
 $\nu_x(K) = 0$.

Notons encore x le point $\Pi^{-1}(x)$, si μ_x et μ'_x sont deux mesures représentantes pour x sur Silov B, telles que $\mu_x \neq \mu'_x$ alors $\nu_x \neq \nu'_x$. A étant fondamentale la proposition sera donc démontrée si nous prouvons que ν_x est une mesure représentante pour x dans A.

Considérons donc une fonction f dans A et ε un nombre quelconque. K étant pic dans SpA donc fermé-Zariski, il existe une fonction h égale à 1 sur K et 0 sur x ; il existe aussi une fonction g de A et un voisinage W de K dans SpA tels que

$$|\nu_a(W)| < \frac{\varepsilon}{2} \sup \left\{ \frac{1}{\|h\|}, \frac{1}{\|f\|} \right\}$$

$$\|g\| = 1, \quad |g| = 1 \text{ sur } K, \quad |g| < \frac{\varepsilon}{2} \sup \left(\frac{1}{\|f\|}, \frac{1}{\|h\|} \right) \text{ sur } \text{SpA} \setminus W.$$

Notons finalement ℓ la fonction $\ell = f(1 - hg)$, ℓ appartient à B et donc

$$f(x) = \ell(x) = \int_{\text{Silov A}} \ell d\nu_x.$$

Or

$$\left| \int_{\text{Silov A}} \ell d\nu_x - \int_{\text{Silov A}} f d\nu_x \right| \leq \int_{\text{Silov A} \setminus W} |fhg| d\nu_x + \int_N |fhg| d\nu_x$$

$$\text{d'où} \quad \left| f(x) - \int_{\text{Silov A}} f d\nu_x \right| \leq \varepsilon \text{ pour tout } \varepsilon \text{ et donc } f(x) = \int_{\text{Silov A}} f d\nu_x.$$

ν_x est donc mesure représentante de x pour A. C.Q.F.D.

Chapitre II

Sous-algèbres de codimension finie d'une algèbre de Banach commutative

commutative.

Dans tout ce chapitre A désignera une algèbre de Banach d'unité e . Il s'agit d'étudier les ^{sous-}algèbres de codimension finie de A . Une étude analogue a été faite par Gamelin [14]. En particulier, nous caractériserons (prop. 8) les sous-algèbres de codimension 1.

1. Soit B une algèbre de codimension finie de A . Dans le chapitre I nous avons défini le conducteur I de A dans B $I = \{a ; a \in A, aA \subset B\}$ I est un idéal de A contenu dans B .

Proposition 1. Le conducteur I de A dans B est de codimension finie dans A .

Soit p l'application projection de A sur A/B ; à chaque b dans B on associe l'application φ de A/B dans A/B définie par $\varphi_b(p(a)) = p(ab)$. C'est une application linéaire qui est bien définie car B est une algèbre. Notons h l'application dans E dans l'algèbre $\mathcal{L}(A/B, A/B)$ des applications linéaires de A/B dans A/B qui à chaque b associe φ .

On a $h(bb')(p(a)) = p(abb') = (h(b) \circ h(b'))(p(a))$. h est donc un homomorphisme d'algèbre, le noyau de h est l'idéal I et B/I est isomorphe à l'algèbre $h(B)$

d'opérateurs sur l'espace vectoriel de dimension finie A/B . B/I est donc de dimension finie. C.Q.F.D.

Proposition 2. L'application canonique $\Pi \text{ Sp} A \longrightarrow \text{Sp} B$ est surjective.

D'après la proposition 2 du chapitre I, il suffit de montrer que l'application canonique $\text{Sp}(A/I) \longrightarrow \text{Sp}(B/I)$ est surjective. Or A/I et B/I étant de dimension finie, cette application est surjective (en particulier parce que $\text{Sp}(B/I)$ est fini et donc égal à $\text{Silov}(B/I)$).

Définition 1. $J_1, J_2, \dots, J_n$ étant des idéaux de A , l'idéal produit $J_1 \dots J_n$ (resp. somme $J_1 + J_2 + \dots + J_n$) consiste en toutes les sommes finies de produits finis $a_1 \dots a_p$ où a_i est dans J_i (resp. toutes les sommes $a_1 + \dots + a_n$ où a_i est dans J_i). Si $J_1 = J_2 = \dots = J_n$ on appelle l'idéal produit J^n puissance n^{ième} de J .

Considérons alors un idéal I de codimension finie d'une algèbre A ; A/I étant de dimension finie, toute suite strictement décroissante d'idéaux est finie; A/I satisfait la condition de chaîne descendante [30], p. 155]. On sait alors [30], p. 177] que l'idéal 0 dans A/I est produit d'idéaux, puissances d'idéaux maximaux de A/I . Il est égal aussi à l'intersection de ces idéaux. Il existe donc n idéaux maximaux $J_1 \dots J_n$ dans A contenant I tels que

$$I = \bigcap_{i=1}^n (I + J_i^{p(i)}).$$

Posons $I_i = I + J_i^{p(i)}$. I_i est un idéal de A contenu dans un seul idéal maximal

J et contenant une puissance de J d'où la proposition :

Proposition 3. Tout idéal de A de codimension finie est l'intersection d'idéaux contenus dans un seul idéal maximal et contenant une puissance de cet idéal.

Définition 2. Un idéal I de A est primaire s'il est contenu dans un seul idéal maximal. Une sous-algèbre B de A est première si le conducteur de A dans B est un idéal primaire.

Théorème 1. Toute sous-algèbre B de A de codimension finie est l'intersection de sous-algèbres premières de l'algèbre C formée des éléments a de A tels que $\hat{a}$ soit constante sur les classes de la relation d'équivalence définie par B sur $\text{Sp}A$.

D'après les propositions 1 et 3, il existe n idéaux maximaux J_i tel que le conducteur I de A dans B soit égal à $\bigcap_{i=1}^p (I + J_i^{p(i)})$; notons m_i ($i \leq n$) les points de $\text{Sp}A$ correspondant aux idéaux J_i .

Soit R la relation d'équivalence définie par B sur $\text{Sp}A$:

$mRm' \iff \hat{b}(m') = \hat{b}(m)$ pour tout b dans B. On vérifie que R est définie par une partition des n points m_i .

Si R a p classes K_i non réduites à un point, posons

$$I_i = \bigcap_{m_j \in K_i} (I + J_j^{p(j)}) \quad (i \leq p).$$

Notons C la sous-algèbre de A formée des éléments a tels que $\hat{a}$ soit constante sur chaque classe de R; on a $B \subset C \subset A$ et d'après la proposition 2: $\text{Sp}B \simeq \text{Sp}C \simeq (\text{Sp}A)/R$.

$I_j \cap C$ est un idéal primaire de C; dans l'algèbre C/I on peut donc écrire [30],

p. 177-178]:

$$C/I = \frac{I_j \cap C}{I} + \frac{I_i \cap C}{I}, \quad i \neq j$$

$$\bigcap_{i=1}^p \frac{I_i \cap C}{I} = \prod_{i=1}^p \frac{I_i \cap C}{I}$$

$$\frac{I_i \cap C}{I} = \sum_{j \neq i} \bigcap_{k \neq j} \frac{I_k \cap C}{I}$$

et C/I est somme directe des idéaux $R_i = \bigcap_{j \neq i} \frac{I_j \cap C}{I}$:

$$C = \bigoplus R_i.$$

On peut aussi remarquer que $\hat{B}$ séparant les points de $\text{Sp}C$, $I_j \cap B$ est un idéal primaire de B et on a donc aussi

$$B/I = \bigoplus (B/I \cap R_i)$$

d'où :

$$B/I + \frac{I_i \cap C}{I} = B/I + \bigoplus_{j \neq i} R_j = [(B/I) \cap R_i] \bigoplus_{j \neq i} R_j.$$

Si donc un élément x de C/I appartient à $\bigcap_{i=1}^p (B/I + \frac{I_i \cap C}{I})$, x s'écrivant de façon unique $x = \sum x_i$ où x_i est dans R_i on en conclut que chaque x_i est dans B/I et donc x est dans B/I d'où :

$$B/I = \bigcap_{i=1}^p (B/I + \frac{I_i \cap C}{I})$$

$$\text{et } B = \bigcap_{i=1}^p (B + I_i \cap C).$$

Or $B_i = B + I_i \cap C$ est une sous-algèbre propre de C et le conducteur de C dans B_i contient $I_i \cap C$ donc est primaire ; d'où la proposition.

On peut remarquer qu'on a aussi :

$$\sum_{i=1}^p \dim C/B_i = \sum_{i=1}^p \dim_{(B/I) \cap R_i} R_i = \dim C/B.$$

Ce théorème montre que toute sous-algèbre de A de codimension finie est obtenue en identifiant un nombre fini de paires de points de $\text{Sp}A$ puis à imposer des conditions "locales" en un nombre fini de points de l'espace obtenu ; pour préciser nous introduisons la notion de dérivation :

Définition 3. m étant un point du spectre d'une algèbre de Banach correspondant à l'idéal maximal J , on appelle dérivation d'ordre p ($p \geq 0$) en m toute forme linéaire non nulle sur J^p nulle sur J^{p+1} (par convention $J^0 = A$ et les dérivations d'ordre 0 sont les homomorphismes).

Proposition 4. Toute sous-algèbre B de A de codimension finie N , séparant les points de $\text{Sp}A$ est le noyau de N dérivations sur A .

Dans ce cas, en utilisant les notations du théorème 1, on a $A = C$ et $B = \bigcap_{i=1}^p B + I_i$ où I_i est un idéal primaire de A contenu dans l'idéal maximal J_i et contenant une puissance $J_i^{p(i)}$ de J_i ; on peut donc écrire

$$B = \bigcap_{i=1}^p \bigcap_{j=1}^{p(i)} B + J_i^j .$$

Notons $n_{ij} = \dim \frac{B + J_i^j}{B + J_i^{j+1}}$; alors d'après la remarque faite à la fin du théorème 1 :

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{p(i)} n_{ij} = \sum_{i=1}^p \dim \frac{A}{B + J_i^{p(i)}} = \dim A/B = N .$$

Or il existe n_{ij} formes linéaires, nulles sur $B + J_i^{j+1}$ non nulles sur J_i^j ; ces formes linéaires sont de dérivations d'ordre j sur A et B est noyau de ces

$$N = \sum_{i,j} n_{ij} \text{ dérivations.}$$

Proposition 5. Toute sous-algèbre B de A de codimension finie est noyau de combinaisons linéaires de dérivations de même ordre positif ou nul sur A .

I étant le conducteur de A dans B , K_i ($i \leq p$) les classes de la relation d'équivalence définie par B sur $\text{Sp}A$, il existe d'après le théorème 1, des idéaux J_j de A correspondant à ces points m_j de différentes classes K_i tels que

$$B = \bigcap_{i=1}^p \left[B + \bigcap_{m_j \in K_i} (I + J_j^{p(j)} \cap C) \right].$$

$$\text{Si } \dim \frac{B + \bigcap_{m_j \in K_i} (J_j^k \cap C)}{B + \bigcap_{m_j \in K_i} (J_j^{k+1} \cap C)} = n_{ik}, \text{ il existe } n_{ik} \text{ formes linéaires nulles sur}$$

$B + \bigcap_{m_j \in K_i} J_j^{k+1}$ non nulles sur $\bigcap_{m_j \in K_i} J_j^{k+1}$ non nulles sur $\bigcap_{m_j \in K_i} J_j^k$; or toute forme linéaire sur $\bigcap_{m_j \in K_i} J_j^{k+1}$ est combinaison linéaire de formes linéaires nulles sur chaque J_j^{k+1} .

Ces n_{ik} formes linéaires sont donc combinaisons linéaires de dérivation d'ordre k aux différents points m_i , et B est le noyau de toutes les formes linéaires analogues obtenues en faisant varier k et i , d'où la proposition.

3. Nous avons montré dans la proposition 1 que si B est une sous-algèbre de codimension finie dans A , son conducteur I est de codimension finie et B/I est isomorphe à une algèbre commutative d'opérateurs sur l'espace vectoriel A/B ; nous allons voir que toute algèbre commutative d'opérateurs sur un espace vectoriel peut être obtenue de cette manière.

En effet, soit E un espace vectoriel de dimension finie et B une algèbre commutative d'opérateurs sur E contenant l'identité 1 de $\mathcal{L}(E, E)$. Munissons E de la structure d'algèbre triviale ($ee' = 0$ pour tout e et e' dans E) et considérons la somme directe

$A = B \oplus E$; on vérifie que A est munie d'une structure d'algèbre commutative unitaire si on définit le produit de la manière suivante : $(b,e)(b',e') = (bb', b(e) + b'(e))$.

B est alors une sous-algèbre de A dont le conducteur I est l'ensemble des éléments $(b, 0)$ tels que $b(e') = 0$ pour tout e' dans E . I est donc nul et $B/I (\simeq B)$ est une algèbre commutative d'opérateurs sur l'espace $\frac{A}{B} (\simeq E)$.

L'étude des sous algèbres de codimension finie est donc en quelque sorte équivalente à l'étude des algèbres commutatives d'opérateurs sur un espace de dimension finie.

On sait [21], par exemple que la dimension vectorielle maximum d'une algèbre commutative d'opérateurs sur un espace de dimension n est égale à $\left[\frac{n^2}{4}\right] + 1$ (les crochets désignant la partie entière) on a donc, dans le cadre des algèbres de codimension finie, la proposition suivante :

° Proposition 6. I étant le conducteur de A dans une sous-algèbre B de dimension finie
alors

$$\dim(B/I) \leq \left[\frac{(\dim A/B)^2}{4}\right] + 1 .$$

On sait [21] que pour les algèbres d'opérateurs, sur un espace vectoriel E , la dimension maximum est atteinte pour des algèbres B tel que $B = 1 + R$ où $R^2 = 0$ et il existe une base de E telle que R soit représentée dans le cas où par exemple n est par l'algèbre des matrices $\begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où M est une matrice carrée quelconque à $\frac{n}{2}$ lignes. On peut vérifier qu'avec la correspondance que nous avons établi plus haut avec les sous-algèbres de codimension finie B d'algèbres A , ce cas correspond au cas où B est une algèbre

première de A et est le noyau de $\frac{n}{2}$ dérivations d'ordre 1 et $\frac{n}{2}$ dérivations d'ordre 2.

On peut aussi donner explicitement et directement un autre exemple où la dimension maximum de B/I est atteinte.

Considérons une algèbre de Banach A telle qu'il existe $n+1$ points m_i dans le spectre de A et n dérivations ϱ_i^j ($0 \leq j \leq n$) en chacun de ces points. Définissons l'algèbre B par les $2n$ formes linéaires suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_i(b) = m_i(b), \quad 1 \leq i \leq n+1 \\ \sum_{i=1}^{n+1} \varrho_i^j(b) = 0, \quad 1 \leq j \leq n. \end{array} \right.$$

On vérifie que B est une algèbre et que le conducteur de A dans B est défini par les $(n+1)^2$ formes linéaires suivantes sur A :

$$m_i(b) = 0, \quad 1 \leq i \leq n+1$$

$$\varrho_i^j(b) = 0, \quad 1 \leq i \leq n+1, \quad 1 \leq j \leq n$$

et on a bien alors $\dim \frac{B}{I} = n^2 + 1 = \left\lfloor \frac{(\dim A/B)^2}{4} \right\rfloor + 1.$

Un autre moyen d'étudier les sous-algèbres de codimension finie et les conducteurs associés est d'utiliser le lemme suivant :

Lemme 1. Soit I un idéal primaire de l'algèbre A de codimension finie dans l'idéal maximal J , soit E inclus dans J tel que $(I + J^2) \oplus E = J$, alors J est algébriquement engendré par I et E [i.e. tout élément dans J est somme finie de produits finis d'éléments de I et de E] ; en particulier si $\dim E = n$, $\frac{A}{I}$ est isomorphe à une algèbre quotient de l'algèbre des polynômes à n variables.

D'après la proposition 3, il existe p tel que $E^p \subset J^p \subset I$.

De plus I et J étant des idéaux on a

$$J = J^2 + I + E$$

$$J^2 \subset J^3 + I + E^2$$

$$J^3 \subset J^4 + I + E^3$$

$$\vdots$$

$$J^{n-1} \subset J^p + I + E^{p-1} \subset I + E^{p-1}$$

et donc $J = I + \sum_{k=1}^{p-1} E^k$. C.Q.F.D.

On déduit aussi que A/I est algébriquement engendré par E et donc est isomorphe à une algèbre quotient de l'algèbre des polynômes à n variables si $\dim E = n$.

Proposition 7. Soit B une algèbre première de A , J étant l'idéal maximal de A contenant le conducteur I , si $I + J^2$ est de codimension 1 dans J alors $2 \dim B/I \leq \dim A/B$.

D'après le lemme précédent A/I est isomorphe à $\frac{P(x)}{I(x)}$ où $P(x)$ est l'algèbre des polynômes à une variable et $I(x)$ un idéal de cette algèbre. Comme on sait qu'il existe p tel que $J^{p-1} \not\subset I$ et $J^p \subset I$, on en déduit que $I(x)$ est l'idéal de tous les polynômes de valuation $\geq p$ (la valuation d'un polynôme étant le degré du monôme de plus bas degré qui figure dans le polynôme) et $\dim A/I = p$.

I étant donné, déterminer les algèbres B telles que le conducteur de A dans B soit I revient à déterminer les sous-algèbres R de $P(x)$ contenant l'idéal $[x^p]$ engendré par x^p et ne contenant pas le monôme x^{p-1} . On peut prendre comme base d'un supplémentaire de

$[x^p]$ dans R des polynômes $P_1 \dots P_n$ de valuation strictement croissante et de degré $\leq p-1$; on remarque aussi que si un polynôme appartient à R et est de valuation k aucun polynôme de valuation $p-1-k$ ne peut appartenir à R (car. x^{p-1} n'appartient pas à R), et on a donc $2n \leq p-1$, c'est-à-dire $2\dim B/I \leq \dim A/I$. L'égalité peut être atteinte en prenant pour R l'algèbre engendrée par $[x^p]$ et par les monômes $1, x^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}, x^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 1} \dots x^{p-2}$; cette algèbre ne contient pas x^{p-1} .

Comme cas particulier on peut appliquer les résultats ci-dessus au cas des sous-algèbres B de A de codimension 1 et on obtient la proposition suivante.

Proposition 8. Le noyau d'une forme linéaire ℓ sur A est une sous-algèbre si et seulement si ℓ a une des 3 formes suivantes :

(i) il existe un homomorphisme m sur A et une constante c tels que $\ell(a) = c m(a)$ pour tout a dans A .

(ii) il existe deux homomorphismes m_1 et m_2 sur A et une constante c tels que $\ell(a) = c [m_1(a) - m_2(a)]$ pour tout a de A

(iii) il existe un homomorphisme m sur A tel que

$$\ell(ab) = \ell(a) m(b) + \ell(b) m(a) \quad \text{pour tout } a \text{ et } b \text{ de } A.$$

Soit B une telle sous-algèbre, noyau d'une forme linéaire ℓ .

Si B ne contient pas l'identité e de A , $A = B \oplus Ce$ et donc $AB \subset B$.

B est un idéal de codimension 1 dans A donc maximal et B est le noyau d'un homomorphisme, ℓ a la forme (i).

Si B contient l'unité e de A , soit I le conducteur de A dans B ; I est différent de B . B/I étant une algèbre d'opérateurs sur l'espace vectoriel A/B a une dimension, $\dim B/I = 1$; donc $\dim A/I = 2$ et $B = I + Ce$. Deux cas peuvent alors se présenter :

1er cas : I est contenu dans deux idéaux maximaux I_1 et I_2 de A auxquels correspondent deux homomorphismes m_1 et m_2 . Alors $I = I_1 \cap I_2$ et $B = I + Ce$ est formée des éléments dont les transformées de Gelfand ont même valeur en m_1 et m_2 ; ℓ a donc la forme (ii).

2ème cas : I est contenu dans un seul idéal maximal J correspondant à l'homomorphisme m . D'après le lemme II.1, E étant un supplémentaire de $I + J^2$ dans J , J est algébriquement engendré par I et E ; I étant de codimension 1 dans J , E est non vide et donc J^2 est inclus dans I . ℓ est nulle sur J^2 non nulle sur J ; c'est donc une dérivation d'ordre 1 en m et une telle dérivation est de la forme (iii) car

$$\ell(ab) - m(a)\ell(b) - m(b)\ell(a) = \ell[(a - m(a))(b - m(b))] = 0.$$

La proposition est démontrée.

La notion de dérivation d'ordre 1 généralise la notion de dérivation classique pour les fonctions définies sur $\mathbb{C}^n$ à valeurs dans $\mathbb{C}$; la valeur d'une telle dérivée en un point pour une fonction est obtenue à partir des valeurs en des points voisins de cette fonction. On peut alors comme dans [29] poser le problème général suivant.

(P) Soit A une algèbre de Banach, ℓ une dérivation en un point m de $\text{Sp}A$, existe-t-il une suite $\{c_n\}$ de nombres complexes non nuls et deux suites disjointes m_n, m'_n de points de $\text{Sp}A$ telles que

$$\ell(a) = \lim_n c_n [m_n(a) - m'_n(a)] \text{ pour tout } a \text{ de } A ?$$

Tout d'abord, on peut voir facilement que si de telles suites existent, m_n et m'_n tendent vers m dans $\text{Sp}A$.

En effet, notons J l'idéal maximal correspondant à m et $I = \ell^{-1}(0) \cap J$; et considérons un élément de J non dans I , alors $\ell(a) \neq 0$ et $\ell(a^2) = \ell(a^3) = 0$.

$$\text{Donc } c_n [m_n(a) - m'_n(a)] \rightarrow \ell(a) \neq 0$$

$$c_n [m_n(a^2) - m'_n(a^2)] \rightarrow 0$$

$$c_n [m_n(a^3) - m'_n(a^3)] \rightarrow 0$$

d'où $m_n(a) + m'_n(a) \rightarrow 0$ et $m'_n(a) [m_n(a) + m'_n(a)] + m_n(a) \rightarrow 0$ et donc $m_n(a)$ et $m'_n(a)$ tendent vers zéro pour tout a de J non dans I , comme tout a dans I s'écrit $a_1 + a_2$ où a_1 et a_2 sont dans J et non dans I , on obtient finalement que $m_n(a)$ et $m'_n(a)$ tendent vers $m(a)$ pour tout a dans A .

Nous allons maintenant montrer que de telles suites c_n, m_n, m'_n , n'existent pas toujours.

Considérons l'algèbre A des fonctions analytiques sur le disque unité ouvert D , continues sur le disque fermé $\bar{D}$ et telles qu'à l'origine les p premières dérivées ($p \geq 3$) soient nulles, c'est une sous-algèbre de codimension finie de l'algèbre du disque D ; son spectre est D . Soit I l'idéal de A des fonctions nulles en 0 ; l'idéal I^2 est de

codimension p dans I ; l'espace des dérivations d'ordre 1 au point 0 qui s'identifie à l'espace des formes linéaires sur I/I^2 est de dimension p ; soit ℓ une dérivation telle que $\ell(z^{p+i}) = \alpha_i \neq 0$, $i = 0, 1, 2$.

Si (P) est vérifié, il existe des suites a_n, b_n, c_n de nombres complexes telles $c_n \neq 0$, $a_n \neq b_n$ et a_n et b_n tendent vers zéro et telles que

$$c_n [a_n^{p+1} - b_n^{p+1}] \longrightarrow \alpha_i, \quad i = 0, 1, 2$$

or

$$a_n^{p+1} - b_n^{p+1} = a_n [a_n^p - b_n^p] + b_n^p [a_n - b_n]$$

on en déduit que

$$b_n^p (a_n - b_n) c_n \longrightarrow \alpha_1$$

$$b_n^{p+1} (a_n - b_n) c_n \longrightarrow \alpha_2$$

d'où

$$b_n \longrightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \neq 0$$

ce qui est impossible puisque b_n tend vers zéro. C.Q.F.D.

Chapitre III

Sommes d'idéaux dans les algèbres de Banach

Soit A une algèbre de Banach de fonctions continues sur un espace compact X séparant les points et contenant les constantes, munie d'une norme notée $\| \cdot \|_A$.

Si K est un fermé de X on note I_K l'ensemble des éléments de A nuls sur K .

Soit K_1 et K_2 deux fermés de X , on étudiera la somme $I_{K_1} + I_{K_2} = \{f, f \in A, f = f_1 + f_2, f_1 \in I_{K_1}, f_2 \in I_{K_2}\}$, en particulier pour savoir à quelle condition cette somme est un idéal fermé.

On s'intéressera principalement au cas où A est une algèbre uniforme sur X et où K_1 et K_2 sont certains ensembles particuliers. On liera aussi cette somme à la construction de suralgèbres de A et enfin on présente des exemples illustrant l'étude faite, et on répond en particulier à un problème posé dans [(2), p. 127] par Gamelin.

1. Considérons l'algèbre quotient $A/I_{K_1 \cup K_2}$, cette algèbre de Banach s'identifie à l'algèbre des restrictions de A à $K_1 \cup K_2$, $\tilde{A} = A|_{K_1 \cup K_2}$ munie de la norme quotient : $\|f\|_{\tilde{A}} = \{\inf \|F\|_A ; F \in A, F = f \text{ sur } K_1 \cup K_2\}$.

Soit π l'application canonique $A \longrightarrow \tilde{A}$ et notons $\tilde{f}$ l'élément $\pi(f) = f|_{K_1 \cup K_2}$ on vérifie que $I_{K_1} + I_{K_2}$ est fermé dans A si et seulement si $\pi(I_{K_1}) + \pi(I_{K_2})$ est

fermé dans $\tilde{A}$.

Considérons l'application $\tilde{T}$ de $\pi(I_{K_1}) \times \pi(I_{K_2})$ dans $\pi(I_{K_1}) + \pi(I_{K_2})$ définie par : $(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2) \in \pi(I_{K_1}) \times \pi(I_{K_2}) \xrightarrow{\tilde{T}} \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$. Cette application est bijective et pour que $\pi(I_{K_1}) + \pi(I_{K_2})$ soit fermé il faut et il suffit que $\tilde{T}^{-1}$ soit de norme bornée.

Donc on a les équivalences suivantes :

$$(i) \quad I_{K_1} + I_{K_2} \text{ fermé} \iff \exists c, \forall f_i \in I_{K_i}, i = 1, 2, \|\tilde{f}_1\|_{\tilde{A}} \leq c \|\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2\|_{\tilde{A}} \iff \exists c, \forall f_i \in I_{K_i}, i = 1, 2 \\ \|\tilde{f}_2\|_{\tilde{A}} \leq c \|\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2\|_{\tilde{A}}.$$

Définition 1. Un idéal I a une unité approchée bornée s'il existe c tel que pour tout f dans I et tout ε il existe e dans I avec $\|e\|_{\tilde{A}} \leq c \|ef - f\|_{\tilde{A}} < \varepsilon$.

Proposition 1. Si I_{K_1} a une unité approchée bornée $I_{K_1} + I_{K_2}$ est fermé.

Soit c la borne des unités approchées et soit $f = f_1 + f_2$, $f_i \in I_{K_i}$, $i = 1, 2$.

Pour tout ε il existe e dans I_{K_1} avec $\|ef_1 - f_1\|_{\tilde{A}} < \varepsilon$, $\|e\|_{\tilde{A}} < c$ donc

$$\|\tilde{ef}_1 - \tilde{f}_1\|_{\tilde{A}} \leq \varepsilon \text{ et } \|\tilde{e}\|_{\tilde{A}} < c.$$

Or $\tilde{fe} = \tilde{f}_1 \tilde{e}$, d'où $\|\tilde{f}_1\|_{\tilde{A}} \leq \|\tilde{fe}\|_{\tilde{A}} + \varepsilon \leq c \|\tilde{f}\|_{\tilde{A}} + \varepsilon$ pour tout ε donc

$$\|\tilde{f}_1\|_{\tilde{A}} < c \|\tilde{f}_1 + \tilde{f}\|_{\tilde{A}} \text{ et d'après (i) } I_{K_1} + I_{K_2} \text{ est fermé.}$$

2. On suppose dans toute la suite que A est une algèbre uniforme sur un espace compact. Rappelons [cf. N.8, N.9] qu'un ensemble K de X est clos si l'algèbre de restrictions $A|_K$ est une algèbre fermée de $\mathcal{C}(X)$. Le théorème de Banach donne l'équivalence suivante: (ii) K est clos $\iff \exists C, \forall f \in A|_K, \|f\|_{A|_K} \leq C \sup_{x \in K} |f(x)|$.

Rappelons aussi que K est pic si pour tout voisinage V de K , il existe g

dans A avec $\|g\|_A = 1$, $g(x) = 1$ pour x dans K $|g(x)| < 1$ pour x dans $X \setminus K$.

On a les propriétés suivantes [16] :

Si, de plus, K est un G_δ en particulier si X est métrisable, alors si K est pic, il existe g dans A tel que

$$\|g\|_A = 1 = g(x) \text{ pour } x \text{ dans } K$$

$$|g(x)| < 1 \text{ pour } x \text{ dans } X \setminus K.$$

On vérifie facilement que tout ensemble pic est fermé-Zariski et clos et dans $A|K$ la norme quotient est égale à la norme uniforme sur X . On a même la propriété suivante :

pour tout ϵ , tout voisinage V de K et toute fonction f de $A|K$, il existe une fonction F dans A telle que

$$F|K = f$$

$$\|F\| < \sup_{x \in K} |f(x)| + \epsilon$$

$$|F(x)| < \epsilon \text{ pour } x \text{ dans } X \setminus V.$$

De plus, si K est un G_δ , la fonction F ci-dessus peut être choisie de façon qu'on ait exactement

$$\|F\| = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

On vérifie aussi que I_K a une unité approchée bornée, on a donc le corollaire suivant :

Corollaire 1 : Si K_1 est pic, K_2 quelconque, $I_{K_1} + I_{K_2}$ est fermé.

Proposition 2 : Si K_1 et K_2 sont deux fermés de X tel que $K_1 \cup K_2$ soit clos,

$I_{K_1} + I_{K_2}$ est fermé.

Si $f_i \in I_{K_i}$, $i = 1, 2$, on peut écrire d'après (i)

$$\|\tilde{f}_1\|_{A|K_1 \cup K_2} \leq c \sup_{x \in K_1 \cup K_2} |f_1(x)| \leq \sup_{x \in K_1 \cup K_2} |f_1(x) + f_2(x)| \leq c \|\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2\|_{A|K_1 \cup K_2}$$

et d'après (ii) $I_{K_1} + I_{K_2}$ est fermé.

Proposition 3 : Si K_1 et K_2 sont clos les deux propriétés suivantes sont équivalentes

1) $I_{K_1} + I_{K_2}$ fermé

2) $K_1 \cup K_2$ clos.

La proposition 2 nous dit que $2 \implies 1$. Démontrons l'implication inverse. Le lettre c désignera toute constante ne dépendant que de K_1 et K_2 . Soit f dans A

$$\forall \varepsilon \quad \exists g \in A, \quad g|_{K_1} = f|_{K_1}, \quad \|g\|_A \leq c \sup_{K_1} |f(x)| + \varepsilon$$

$$\exists h \in A, \quad h|_{K_2} = g - f|_{K_2}, \quad \|h\|_A < c \sup_{K_2} |(g-f)(x)| + \varepsilon$$

on s'écrit $h = h - g + f + g - f$ avec $h - g + f \in I_{K_2}$, $g - f \in I_{K_1}$.

D'après (i) en utilisant (ii) et les inégalités ci-dessus on peut écrire

$$\|\tilde{g-f}\|_{A|K_1 \cup K_2} < c \|\tilde{h}\|_{A|K_1 \cup K_2} < c \|h\|_A \leq c \sup_{K_2} |(g-f)(x)| + \varepsilon \leq c \sup_{K_1 \cup K_2} |(g-f)(x)| + \varepsilon.$$

$$\text{Soit } \|\tilde{f}\|_{A|K_1 \cup K_2} < \|\tilde{g}\|_{A|K_1 \cup K_2} + c \sup_{K_1 \cup K_2} |(g-f)(x)| + \varepsilon \leq \sup_{K_1 \cup K_2} |f(x)| + 2\varepsilon$$

et d'après (ii), $K_1 \cup K_2$ est clos.

Proposition 4. Si K_1 est pic et K_2 clos, $I_{K_1} + I_{K_2} = I_{K_1 \cap K_2}$.

Soit f un élément de $I_{K_1 \cap K_2}$, soit ε quelconque, soit V un voisinage de K_1 tel que $V \cap K_2 \subset \{x ; |f(x)| < \varepsilon\}$; en considérant la fonction pic g correspondant à ce

voisinage, il existe n tel que $\sup_{K_2} |f g^n(x)| < \varepsilon$, si π est l'application canonique $A \rightarrow A|_{K_2}$, K_2 étant clos, il existe c tel que

$$\|\pi(f) - \pi f(1-g^n)\|_{A|_{K_2}} < c\varepsilon.$$

Donc $\pi(f)$ comme $\pi f(1-g^n)$ appartient à l'idéal fermé $\pi(I_{K_1})$; il existe donc f_1 dans I_{K_1} et f_2 dans I_{K_2} tel que $f = f_1 + f_2$. C.Q.F.D.

Corollaire 2. Si K_1 est pic et K_2 clos, $K_1 \cup K_2$ est clos.

Remarque : dans ce cas on voit facilement que $K_1 \cap K_2$ est clos, car $K_1 \cap K_2$ est pic pour l'algèbre $A|_{K_2}$.

3. Définition 2. Soient A et B deux algèbres avec $A \subset B$; dans le chapitre I on a défini le conducteur de B dans A , i.e. l'idéal S de A défini par $S = \{f; fB \subset A\}$. On définit de même le conducteur de I dans I' où I et I' sont deux idéaux d'une algèbre A .

Soit A une algèbre de Banach de fonctions sur X et K_1 et K_2 deux fermés de X tels que $K_1 \cup K_2 = X$.

Considérons l'algèbre $B = A|_{K_1} \oplus A|_{K_2}$; B se réalise comme algèbre de fonctions sur $\tilde{X}$, union disjointe de K_1 et K_2

$$\tilde{X} = \tilde{K}_1 \cup \tilde{K}_2 \quad \tilde{K}_i \approx K_i, \quad i = 1, 2, \quad \tilde{K}_1 \cap \tilde{K}_2 = \emptyset.$$

Soit π l'injection canonique de A dans B et τ_i l'application $K_i \rightarrow \tilde{K}_i$.

Proposition 5. Le conducteur L de B dans $\pi(A)$ est $\pi(I_{K_1} + I_{K_2})$.

Soit f dans L , considérons l'élément g de B nulle sur $\tilde{K}_1$ et égale à 1 sur $\tilde{K}_2$.

F s'écrit $f = fg + f(1-g)$ et par hypothèse fg et $f(1-g)$ appartiennent à $\Pi(A)$, donc, en fait à $\Pi(I_{K_1})$ et $\Pi(I_{K_2})$ respectivement. Réciproquement, soit $f = \Pi(f_1) + \Pi(f_2)$ où $f_i \in I_{K_i}$, $i = 1, 2$, et soit g un élément de B , il s'écrit :

$$g|_{\tilde{K}_i} = \Pi(g_i)|_{\tilde{K}_i} \text{ où } g_i \text{ est dans } A$$

et fg est égal à $\Pi(f_1 g_2) + \Pi(f_2 g_1)$ donc appartient à $\Pi(A)$ et f est dans L .

Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence qui identifie tous les couples $\tau_1(x)$ et $\tau_2(x)$ où x est dans $K_1 \cap K_2$ et A' l'algèbre des éléments de B constants sur les classes d'

$\mathcal{R}$. On peut aussi définir A' par $A' = \{f_i \in \mathcal{C}(X) ; f|_{K_i} \in A|_{K_i}, i = 1, 2\}$.

Proposition 6. Le conducteur J de A' dans A est égal au conducteur J' dans

$$I_{K_1 \cap K_2} \text{ dans } I_{K_1} + I_{K_2}.$$

Nous allons montrer que J et J' sont tous deux égaux à l'idéal J'' défini par

$$J'' = \{f ; f \in A ; f|_{K_1 \times I_{K_1 \cap K_2}}|_{K_1} \subset I_{K_2}|_{K_1}\}.$$

En effet, on a trivialement $J' \subset J''$. Réciproquement, soit f un élément de J'' et g un élément de $I_{K_1 \cap K_2}$; par hypothèse $f g|_{K_1} \subset I_{K_2}|_{K_1}$, il existe f_1 dans I_{K_1} et f_2 dans I_{K_2} tels que $fg = f_1 + f_2$, donc f est dans J' .

D'autre part, si f est dans J et $\tilde{g}$ est dans $I_{K_1 \cap K_2}|_{K_1}$ la fonction g définie par $g = 0$ sur K_2 et $g|_{K_1} = \tilde{g}$ est dans B donc fg est dans A donc en fait dans I_{K_2} et $f|_{K_1} \cdot \tilde{g} \in I_{K_2}|_{K_1}$ donc f est dans J'' .

Réciproquement, tout élément g de A' s'écrit $g = g_1 + g_2$ où g_1 est dans A et g_2 est un élément de A' nulle sur K_1 ; et J est égal à J''' défini par

$J''' = \{f ; f \in A ; \forall g \in A' \quad g = 0 \text{ sur } K_2 ; fg \in A\}$. Soit donc f dans J'' et g un élément de A' nul sur K_2 ; $g|_{K_1}$ est dans $I_{K_1 \cap K_2}|_{K_1}$ donc $fg|_{K_1} \in I_{K_2}|_{K_1}$; il existe donc h dans I_{K_2} telle que $fg|_{K_1} = h|_{K_1}$ mais $fg|_{K_2} = h|_{K_2} = 0$ donc $fg = h$ et fg est dans A donc f est dans J''' donc dans J . C.Q.F.D.

En particulier A est égal à A' si et seulement si $I_{K_1 \cap K_2} = I_{K_1} + I_{K_2}$ car dans ce cas les conducteurs considérés sont égaux à A .

4. On va considérer un des exemples illustrant les propositions ci-dessus.

a) En liaison avec les propositions 3 et 6, si $K_1, K_2, K_1 \cup K_2$ sont clos sans que K_1 ou K_2 soient pics, l'idéal fermé $I_{K_1} + I_{K_2}$ peut être distinct de $I_{K_1 \cap K_2}$ même dans le cas où $K_1 \cap K_2$ est pic. En effet, considérons une algèbre uniforme A et M un idéal primaire non maximal contenu dans l'idéal maximal I_x , x appartenant au spectre X de A .

Soient A_1 et A_2 deux copies de A et $A_1 \oplus A_2$ est une algèbre uniforme sur l'union disjointe de deux copies de X , X_1 et X_2 .

Soit π_i l'application canonique de A dans A_i .

Soit $B = \{f ; f \in A_1 \oplus A_2 ; \pi_1(f|_{X_1}) - \pi_2(f|_{X_2}) \in M\}$.

On vérifie facilement que B est une algèbre uniforme de spectre $\frac{X_1 \cup X_2}{\mathfrak{A}}$ où $\mathfrak{A}$ consiste à identifier les deux points x_1 et x_2 images de x dans X_1 et X_2 respectivement.

On désigne par $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$ et $\tilde{x}$ les images de X_1, X_2 et x_1 dans le spectre de B , $\tilde{X}_1 \cap \tilde{X}_2 = \{\tilde{x}\}$.

$\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_1 \cup \tilde{X}_2$ sont clos donc $I_{\tilde{X}_1} + I_{\tilde{X}_2}$ est fermé.

$$I_{\tilde{X}_1} + I_{\tilde{X}_2} = \{f ; f \in B ; \pi_i(f/X_i) \in \mathcal{M}, i = 1, 2\}$$

$$I_{\tilde{X}_1 \cap \tilde{X}_2} = \{f ; f \in B ; \pi_i(f/X_i) \in \mathcal{M}; i = 1, 2 ; \pi_1(f/X_1) - \pi_2(f/X_2) \in \mathcal{M}\}.$$

Ces deux idéaux sont distincts.

Cette construction est une généralisation du cas où on considère deux disques D_1 et D_2 disjoints dans $\mathbb{C}$ et l'algèbre B des fonctions continues sur D_1 et D_2 analytiques à l'intérieur de chacun des deux disques et qui prennent la même valeur ainsi que leurs dérivées aux deux centres x_1 et x_2 des disques. L'idéal somme considéré ci-dessus est l'ensemble des fonctions qui sont nulles ainsi que leurs dérivées aux deux points x_1 et x_2 et dont les dérivées ont la même valeur en x_1 et x_2 .

La construction s'applique en prenant pour A l'algèbre standard $A(D)$ du disque et pour M un idéal primaire non maximal contenu dans l'idéal maximal I_1 ; 1 est un point pic et son image dans $\text{Sp}B$ est aussi un point pic mais les deux idéaux considérés sont différents.

Cette construction donne donc l'exemple d'algèbres B vérifiant les conditions suivantes. le spectre $\mathcal{M}_B$ de B est obtenu à partir de deux compacts X et Y en identifiant un point de X et un point de Y ; le point identifié est un point pic; et il existe une fonction f de $\mathcal{C}(\mathcal{M}_B)$ telle que $f|_X \in B|_X$; $f|_Y \in B|_Y$ mais $f \notin B$; ceci répond à une question de Gamelin [14].

b) En liaison avec le corollaire 1 et la proposition 4, si K_1 est pic et K_2 fermé-

Zariski non clos l'idéal fermé $I_{K_1} + I_{K_2}$ peut être strictement contenu dans $I_{K_1 \cap K_2}$: Nous donnerons un tel exemple dans le chapitre VI.

c) L'union de deux ensembles clos K_1 et K_2 n'est pas forcément close ; un exemple d'un tel fait donne aussi un exemple où $I_{K_1} + I_{K_2}$ n'est pas fermé d'après la proposition 4. Par exemple dans l'algèbre $H^\infty(D)$ des fonctions analytiques bornées l'union de deux suites d'interpolation K_1 et K_2 n'est d'interpolation que si I_{K_1} et I_{K_2} n'appartiennent pas à un même idéal propre de $H^\infty(D)$ [(18), p. 208].

d) L'intersection de deux ensembles clos n'est pas forcément close. Soit A une algèbre uniforme sur X et K un fermé-Zariski non clos de X .

Soit A_1 deux copies de A ; $A_1 \oplus A_2$ est une algèbre uniforme sur l'union disjointe $X_1 \cup X_2$ de deux copies de X .

Soit π_i (resp. τ_i) l'application $A_i \rightarrow A$ (resp. $X \rightarrow X_i$) et : la relation d'équivalence qui identifie chaque couple $\tau_1(x)$ et $\tau_2(x)$ où x est dans K .

$\tilde{A}$ la sous-algèbre de $A_1 \oplus A_2$ des fonctions compatibles avec $\mathfrak{R}$, K étant fermé-Zariski, on vérifie que $\tilde{A}$ est une algèbre uniforme sur $\frac{X_1 \cup X_2}{\mathfrak{R}} = \tilde{X}$; $\frac{X_1}{\mathfrak{R}}$ et $\frac{X_2}{\mathfrak{R}}$ sont clos mais $\frac{X_1}{\mathfrak{R}} \cap \frac{X_2}{\mathfrak{R}} = \frac{\tau_1(K)}{\mathfrak{R}}$ n'est pas clos car K ne l'est pas.

Chapitre IV

Extensions analytiques d'algèbres de restrictions de l'algèbre $H^\infty(D)$.

Ce chapitre et les suivants sont consacrés à l'étude de différentes algèbres de fonctions analytiques sur le disque unité D et à leurs restrictions à des sous-ensembles de D .

On introduit d'abord les définitions et rappels suivants [18].

Rappel 1.

O étant un ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$, E un ensemble de la frontière ∂O de O on note

$H^\infty(O)$ l'algèbre des fonctions analytiques bornées sur O

$H_E^\infty(O)$ la sous-algèbre de $H^\infty(O)$ formée des fonctions se prolongeant continuellement à $O \cup E$

$$H_E^\infty(O) = H_{\partial O \setminus E}^\infty(O).$$

Munies de la norme uniforme sur O , ce sont des algèbres de Banach uniformes.

Dans la suite, nous allons étudier les algèbres $H_E^\infty(D)$, D étant le cercle unité.

Rappel 2.

D étant le disque unité ouvert, T le cercle unité, on note $\bar{D}$ l'union $D \cup T$, m la mesure de Lebesgue sur T , puis

$\mathcal{L}^\infty(T)$ l'algèbre des fonctions mesurables bornées sur T ; munie de la norme uniforme

sur T c'est une algèbre de Banach

$L^\infty(T)$ l'algèbre quotient de $\mathcal{L}^\infty(T)$ par la relation d'équivalence qui identifie des fonctions égales presque partout ; munie de la norme quotient (norme sup essentielle) c'est une algèbre de Banach qui est uniforme.

D'après le théorème de Fatou, toute fonction F de $H^\infty(D)$ a des limites non tangentielles en presque tout point de T ; ces valeurs limites définissent un élément $\tilde{F}(e^{i\theta})$ de $L^\infty(T)$ et F est l'intégrale de Poisson de $\tilde{F}$ i.e.

$$F(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_{e^{i\theta} \in T} P_r(t - \theta) \tilde{F}(e^{i\theta}) d\theta$$

où $P_r(\theta)$ est le noyau de Poisson

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2}.$$

On sait aussi que si $\tilde{F}$ est nulle sur un ensemble de mesure positive $F(z)$ est identiquement nulle.

Remarquons que $H_T(D)$ est l'algèbre classique $A(D)$ des fonctions continues sur $\bar{D}$, analytiques sur D .

Rappel 3.

Soit $S = \{\alpha_n\}$ une suite de points de D distincts ou non. On dit que S est une suite de Blaschke si $\sum_n (1 - |\alpha_n|) < \infty$.

Si cette condition est vérifiée, le produit infini

$$B(z) = \prod_{n \in \mathbb{N}} \frac{\bar{\alpha}_n}{|\alpha_n|} \left(\frac{\alpha_n - z}{1 - \bar{\alpha}_n z} \right)$$

(avec la convention $\frac{\bar{\alpha}_n}{\alpha_n} = 1$ si $\alpha_n = 0$) définit une fonction de $H^\infty(D)$, nulle sur S ,

de module 1 presque partout sur T : on dit que $B(z)$ est un produit de Blaschke

$B(z)$ est une fonction méromorphe en dehors de l'ensemble E des points d'accumulation de S , de poles $\{\bar{\alpha}_n^{-1}, n \in \mathbb{N}\}$, et $B(z)$ ne se prolonge pas continuellement à E .

Si au contraire $\sum_n 1 - |\alpha_n| = \infty$, toute fonction nulle sur S est identiquement nulle.

F étant une fonction de $H^\infty(D)$ non nulle, l'ensemble de ses zéros, chacun compté avec son ordre de multiplicité, forme une suite de Blaschke et F s'écrit $F = BG$ où B est le produit de Blaschke associé à S et G une fonction de $H^\infty(D)$ sans zéros. Pour toute telle fonction G de $H^\infty(D)$ sans zéros de norme inférieure à 1, il existe une mesure μ positive sur T telle que

$$G = \|G\| \exp \left[- \frac{1}{2\pi} \int_{e^{i\theta} \in T} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta) \right].$$

En utilisant la décomposition de Lebesgue de μ on déduit que toute fonction F de $H^\infty(D)$ s'écrit sous la forme $F = IG$ où I est une fonction de module 1 presque partout sur T et G est une fonction de la forme

$$G = \exp \frac{1}{2\pi} \int_{e^{i\theta} \in T} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} k(\theta) d\theta$$

où $k(\theta)$ est réelle intégrable. Une telle fonction G est dite extérieure et I est dite intérieure.

Dans ce chapitre, S désignant une suite de Blaschke, on s'intéresse à l'algèbre des restrictions de $H^\infty(D)$ à S qu'on note $H^\infty(D)|_S$; on montre que toute fonction de $H^\infty(D)|_S$ s'étend en une fonction analytique bornée sur un ouvert plus grand que D . On obtient le théorème 1 suivant qui généralise des résultats de [1] et [17]:

Théorème 1. Soit S une suite de Blaschke, notons E l'ensemble de T formé des points d'accumulation de S, il existe un ouvert O contenant $\bar{D} \setminus E$ tel que

$$H^{\infty}(O)|_S = H^{\infty}(D)|_S .$$

La condition que S soit une suite de Blaschke est nécessaire pour l'existence de l'ouvert O ; sinon toute fonction de $H^{\infty}(D)|_S$ est la restriction d'une seule fonction de $H^{\infty}(D)$ et le théorème est évidemment faux.

Considérons alors une fonction F de $H^{\infty}(D)$, il s'agit de définir une fonction G égale à F sur S et analytique, bornée sur un ouvert contenant $\bar{D} \setminus E$, ne dépendant que de S. Considérons la fonction $F_1(z) = \frac{F(z) + \|F\|}{\|F + \|F\|}$; c'est une fonction de norme inférieure ou égale à 1, ne s'annulant pas sur D. Si on sait résoudre le problème posé pour F_1 en trouvant la fonction G_1 correspondante, alors la fonction $G(z) = \|F + \|F\| G_1(z) - \|F\|$ résoudra le problème pour F.

On peut donc supposer que F est de norme $\|F\| \leq 1$ et sans zéros sur D. F s'écrit donc

$$F(z) = \exp - \frac{1}{2\pi} \int_{e^{i\theta} \in T} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta)$$

où μ est une mesure positive sur T.

Nous allons remplacer dans l'intégrale la fonction $\frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}$ par une fonction qui peut résoudre le problème. Pour cela nous établissons le lemme suivant :

Lemme 1. Il existe une fonction $\eta(\alpha)$ strictement positive, continue, définie sur $T \setminus E$ et une fonction $f(z, \alpha, x)$ où z est dans C, α dans C, x dans R, telle que pour

toute fonction $\varepsilon(\alpha)$ définie sur $T \setminus E$ continue et vérifiant $0 < \varepsilon(\alpha) \leq \eta(\alpha)$, il existe
un ouvert Δ_ε de $\mathbb{C}$ contenant $\bar{D} \setminus E$ tel que la fonction $f(z, \alpha, \varepsilon(\alpha))$ où
 $(z, \alpha) \in \Delta_\varepsilon \times (T \setminus E)$ vérifie

$$(i) \quad f(z, \alpha, \varepsilon(\alpha)) = \frac{\alpha + z}{\alpha - z} \quad \text{pour} \quad (z, \alpha) \in S \times (T \setminus E)$$

$$(ii) \quad \operatorname{Re} f(z, \alpha, \varepsilon(\alpha)) \geq -5 \quad \text{pour} \quad (z, \alpha) \in \Delta_\varepsilon \times (T \setminus E)$$

$$(iii) \quad \text{Pour tout compact } K \text{ de } \Delta_\varepsilon, \text{ il existe une constante } M_K \text{ telle que}$$

$$|f(z, \alpha, \varepsilon(\alpha))| < M_K \quad \text{pour} \quad (z, \alpha) \in K \times (T \setminus E)$$

$$(iv) \quad f(z, \alpha, \varepsilon(\alpha)) \text{ est continue par rapport à } \alpha \text{ et analytique par rapport à } z \\ \text{pour } (z, \alpha) \in \Delta_\varepsilon \times (T \setminus E).$$

Pour montrer le lemme, nous allons poser :

$$f(z, \alpha, x) = \frac{\alpha(1+x) + z}{\alpha(1+x) - z} + \left(\frac{\alpha + z}{\alpha - z} - \frac{\alpha(1+x) + z}{\alpha(1+x) - z} \right) \left(1 - \frac{B(z)}{B(\alpha)} \right)^2$$

(i) est clairement vérifié pour toute fonction $\varepsilon(\alpha)$.

D'autre part f s'écrit $f = f_1 + f_2$ où

$$f_1(z, \alpha, x) = \frac{\alpha(1+x) + z}{\alpha(1+x) - z}$$

$$\text{et} \quad f_2(z, \alpha, x) = \frac{2zx(B(z) - B(\alpha))^2}{(\alpha - z)(\alpha(1+x) - z)(B(\alpha))^2}.$$

Notons $\mathcal{D}$ l'ouvert $\mathcal{D} = \{z ; |B(z)| < 2 ; |z| < 2\}$.

Considérons alors une suite décroissante $\{V_n\}$ de voisinages ouverts de E dans T

tel que $\bigcap_n V_n = E$. Alors pour tout n , il existe une constante μ_n telle que

$$\left| \frac{B(z) - B(\alpha)}{z - \alpha} \right| < \mu_n \quad \text{pour } (z, \alpha) \in [\mathcal{D} \times (V_n \setminus V_{n+1})].$$

On choisit comme fonction $\eta(\alpha)$ cherchée, une fonction continue, strictement positive, telle que $\eta(\alpha) < \frac{1}{\mu_n^2}$ si α est dans $V_n \setminus V_{n+1}$.

Soit alors $\varepsilon(\alpha)$ une fonction sur $T \setminus E$ continue, strictement positive et inférieure à $\eta(\alpha)$. Pour chaque α de $T \setminus E$ notons $P(\alpha)$ l'ensemble $\left\{ z ; \left| \frac{z - \alpha}{z - \alpha(1 + \varepsilon(\alpha))} \right| < 1 \right\}$.

C'est un demi-plan contenant $\bar{D} \setminus E$.

$\varepsilon(\alpha)$ étant strictement positive, on vérifie que l'ensemble $P = \bigcap_{\alpha \in T \setminus E} P_\alpha$ contient un ouvert Δ' contenant $\bar{D} \setminus E$.

On a : $\operatorname{Re} f_1(z, \alpha, \varepsilon(\alpha)) > -1$ pour $(z, \alpha) \in P \times (T \setminus E)$
et $|f_2(z, \alpha, \varepsilon(\alpha))| < 4$ pour $(z, \alpha) \in (P \cap \mathcal{D}) \times (T \setminus E)$.

On prend alors comme ouvert Δ_ε cherché l'ouvert $\Delta' \cap \mathcal{D}$ qui contient $\bar{D} \setminus E$ et on a

$$\operatorname{Re} f(z, \alpha, \varepsilon(\alpha)) > -5 \quad \text{pour } (z, \alpha) \in \Delta_\varepsilon \times (T \setminus E)$$

Donc (ii) est vérifié. De plus, pour tout compact K de Δ_ε , $|\alpha(1 + \varepsilon(\alpha)) - z|$ est bornée inférieurement pour $(z, \alpha) \in K \times (T \setminus E)$, (iii) est donc vérifié. Enfin $\varepsilon(\alpha)$ étant continue et Δ_ε étant contenu dans $\mathcal{D}$, (iv) est vérifié. Le lemme est démontré.

Nous pouvons en déduire facilement le théorème 1. En effet, posons

$$H(z) = \exp - \frac{1}{2\pi} \int_{e^{i\theta} \in T \setminus E} f(z, e^{i\theta}, \eta(e^{i\theta})) d\mu(\theta)$$

où f et η sont les fonctions définies dans le lemme 1.

Δ_η étant le domaine correspondant à $\eta(\alpha)$, donné par le même lemme, observons que d'après (iii) et (iv) $H(z)$ est analytique sur Δ_η et d'après (ii) bornée sur Δ_η par

$\exp \frac{5}{2\pi} \mu(T \setminus E)$. Posons aussi

$$L(z) = \exp - \frac{1}{2\pi} \int_{e^{i\theta} \in E} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta)$$

et notons $P'_\alpha = \left\{ z ; \operatorname{Re} \frac{\alpha + z}{\alpha - z} > -1 \right\}$.

E étant fermé, on vérifie que $\bigcap_{\alpha \in E} P'_\alpha$ contient un ouvert Δ' contenant $\bar{D} \setminus E$, et sur Δ' , $L(z)$ est analytique et bornée par $\exp \frac{2}{\pi} \mu(E)$.

Notons finalement

$$G(z) = L(z) H(z) \quad \text{et} \quad 0 = \Delta_\eta \times \Delta',$$

G appartient à $H^\infty(0)$ et est égale à F sur S . Le théorème est démontré.

On a alors immédiatement

Corollaire 1. $H^\infty(D)|_S = H_{T \setminus E}(D)|_S$.

Remarque. Ce théorème complète des résultats connus:

E. Akutowicz et L. Carleson [1] ont montré le théorème 1 pour des ouverts O de la forme suivante : ils considèrent un nombre fini d'arcs fermés γ sur T disjoints de E et les ouverts O sont bornés par, d'une part, un nombre fini d'arcs analytiques extérieurs à $\bar{D}$ et rencontrant T aux extrémités des arcs γ et, d'autre part, par les arcs de T complémentaires des arcs γ .

E. A. Heard et J. Wells [17] ont montré le théorème 1 pour des suites S de Blaschke qui sont d'interpolation i.e. telles que $H^\infty(D)|_S$ est isomorphe à l'algèbre ℓ^∞ des suites bornées.

On va s'intéresser maintenant au problème analogue pour l'algèbre $H_E(D)$ et on va obtenir le théorème suivant.

Théorème 2. Soit S une suite de Blaschke ; notons E l'ensemble de ses points d'accumulation sur T ; si $m(E) = 0$ il existe un ouvert O contenant $\bar{D} \setminus E$ tel que $H_E(D)|_S = H_E(O)|_S$.

La condition $m(E) = 0$ est naturelle. En effet, si $m(E)$ est positive, on sait (cf. Rappel 1 au début du chapitre) alors que toute fonction de $H_E(D)|_S$ est la restriction d'une seule fonction de $H_E(D)$; si $E \neq T$, on considère une fonction F de $H_E(D)$ n'appartenant pas à $A(D)$, $F|_S$ n'appartient donc pas à $A(D)|_S$ donc à aucun $H_E(O)|_S$ quel que soit O ouvert contenant $\bar{D} \setminus E$ et le théorème est faux. Si $E = T$, $\bar{D} \setminus E = D$ et le théorème est une trivialité (on prend $O = D$).

Notons maintenant $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions extérieures de $H^\infty(D)$ (cf. Rappel 3 de ce chapitre) et $I_E(O)$ les fonctions de $H_E(O)$ nulles sur E , O étant un ouvert contenant D .

Pour la démonstration du théorème 2, nous allons d'abord montrer le lemme suivant (en utilisant les notations du théorème 2).

Lemme 2. $m(E)$ étant nul, les propriétés suivantes sont équivalentes

- (i) $\exists O$ ouvert contenant $\bar{D} \setminus E$ tel que $(I_E(D) \cap \mathcal{C})|_S \subset I_E(O)|_S$
- (ii) $\exists O$ ouvert contenant $\bar{D} \setminus E$ tel que $I_E(D)|_S = I_E(O)|_S$
- (iii) $\exists O$ ouvert contenant $\bar{D} \setminus E$ tel que $H_E(D)|_S = H_E(O)|_S$.

On a évidemment (iii) $\implies$ (ii) $\implies$ (i).

Montrons que (i) $\implies$ (ii). Soit F une fonction de $I_E(D)$; F s'écrit (cf. R ci-dessus) $F = I \overset{1 \text{ sur } T}{G}$ où I est une fonction de module 1 et G un élément de $\mathcal{C}$. Montrons que

G est dans $I_E(D)$. Soit $\alpha = e^{i\theta_0}$ un point de E et ε un nombre quelconque ; F appartenant à I_E , il existe r_0 et η tels que

$$|F(re^{i\theta})| < \varepsilon \quad \text{si } r > r_0 \quad \text{et} \quad |\theta - \theta_0| < \eta.$$

D'après le théorème de Fatou, on en déduit que $|G(e^{i\theta})| = |F(e^{i\theta})| < \varepsilon$, pour presque tout θ vérifiant $|\theta - \theta_0| < \eta$.

Or, si on considère le noyau de Poisson $P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2}$, on voit qu'il existe r_1 tel que

$$P_r(\theta - \theta') < \frac{2\pi\varepsilon}{\|F\|} \quad \text{pour } r > r_1 \quad \text{et} \quad |\theta - \theta'| > \frac{\eta}{2}.$$

On en déduit les inégalités suivantes

$$|G(re^{it})| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\theta - \theta_0| \leq \eta} |P_r(\theta - t)| |G(e^{i\theta})| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{|\theta - \theta_0| > \eta} |P_r(\theta - t)| |G(e^{i\theta})| d\theta \leq 2\varepsilon$$

.pour $r > r_1$ et $|t - \theta_0| < \frac{\eta}{2}$.

$G(z)$ se prolonge donc continuellement en une fonction nulle au point α . G est donc dans $I_E(D) \cap \mathcal{C}$; (iii) étant vérifié, il existe un ouvert O_1 tel que $(I_E(D) \cap \mathcal{C})|_S \subset I_E(O_1)|_S$, il existe donc G dans $I_E(O_1)$ égale à G sur S .

D'autre part, d'après le théorème 1 de ce chapitre, il existe O_2 contenant $\bar{D} \setminus E$ tel que $H^\infty(D)|_S = H^\infty(O_2)|_S$. Il existe donc une fonction I' de $H^\infty(O_2)$ égale à I sur S .

Posons $F' = G'.I'$ et $O = O_1 \cap O_2$, O contient $\bar{D} \setminus E$ et F' est une fonction de $I_E(O)$ égale à F sur S . (ii) est vérifié.

Montrons maintenant que (ii) $\implies$ (iii). Soit F une fonction de $H_E(D)$.

Considérons un ouvert O_1 connexe simplement connexe contenant $\bar{D} \setminus E$ et dont la fron-

tière est une courbe de Jordan rectifiable contenant E . On sait alors [5] que la transformation conforme τ de O_1 sur D se prolonge en un homéomorphisme continu de $\bar{O}_1$ sur $\bar{D}$ qu'on note encore τ et τ applique l'ensemble E de mesure nulle sur un ensemble E' de T de mesure nulle.

D'après le théorème de Rudin [18] $A(D)|_{E'} = \mathcal{C}(E')$, il existe donc une fonction G de $A(D)$ égale à $F \circ \tau^{-1}$ sur E' ; la fonction $F_1 = G \circ \tau$ est une fonction de $H_E(O_1)$ égale à F sur E . D'autre part, (ii) étant vérifié, il existe un ouvert O_2 tel que $I_E(D)|_S = I_E(O_2)|_S$; il existe donc F_2 dans $I_E(O_2)$ égale à $F - F_1$ sur S .

Posons $O = O_1 \cap O_2$, la fonction $F_2 + F_1$ appartient à $H_E(O)$ et est égale à F sur S , (iii) est donc vérifié.

Pour démontrer le théorème 2 il suffit donc de vérifier la propriété (iii) du lemme 2.

Pour cela nous allons raffiner la méthode utilisée dans le théorème 1.

Pour démontrer le théorème 1 nous avons remplacé dans l'intégrale la fonction $\frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}$ par une fonction f de façon que l'intégrale ainsi obtenue soit une fonction de z analytique bornée dans un ouvert O contenant $\bar{D} \setminus E$. Nous allons montrer qu'on peut choisir f de façon que les hypothèses de continuité sur E des fonctions considérées soient conservées.

f est de la forme $f = f_1 + f_2$ où

$$f_1(z, \alpha, \varepsilon(\alpha)) = \frac{\alpha(1+\varepsilon(\alpha)) + z}{\alpha(1+\varepsilon(\alpha)) - z}$$

et $f_2(z, \alpha, \varepsilon(\alpha))$ est bornée pour $(z, \alpha) \in O \times T \setminus E$.

Le lemme ci-dessous nous montre qu'on peut choisir $\varepsilon(\alpha)$ de façon que Ref_1 ait des propriétés de noyau unité approchée analogues au noyau de Poisson.

Lemme 3. Il existe un ouvert O contenant $\bar{D} \setminus E$, une fonction $\varepsilon(\alpha)$ définie sur $T \setminus E$, strictement positive, continue et inférieure à la fonction $\eta(\alpha)$ définie dans le lemme 1, tels que pour tout voisinage V de E dans T , il existe W voisinage de E dans C avec

- (i) $\operatorname{Re} f_1[z, e^{i\theta}, \varepsilon(e^{i\theta})] < \frac{1}{4}, \quad z \in W \cap O, \quad e^{i\theta} \in T \setminus V$
- (ii) $\int_{e^{i\theta} \in V} \operatorname{Re} f_1[z, e^{i\theta}, \varepsilon(e^{i\theta})] > \frac{1}{4}, \quad z \in W \cap O.$

Soit V_n une base de voisinages fermés de E tels que $V_{n+1} \subset V_n$ et $V_1 = T$.

Il suffit de trouver les voisinages W cherchés, pour les voisinages V_n .

Notons

$$Q[re^{it}, e^{i\theta}, \varepsilon(e^{i\theta})] = \operatorname{Re} f_1[re^{it}, e^{i\theta}, \varepsilon(e^{i\theta})] = \frac{1 - \left[\frac{r}{1 + \varepsilon(e^{i\theta})} \right]^2}{1 - \frac{2r}{1 + \varepsilon(e^{i\theta})} \cos(\theta - t) + \left[\frac{r}{1 + \varepsilon(e^{i\theta})} \right]^2}$$

$Q(re^{it}, e^{i\theta}, 0)$ est égal au noyau de Poisson $P_r(\theta - t)$.

La distance sur T entre $T \setminus V_n$ et V_{n+1} étant strictement positive, si θ est dans $T \setminus V_n$ et t dans V_{n+1} , $P_r(\theta - t)$ est continue au point $r = 1$ où elle est nulle, uniformément par rapport à θ et t . Il existe aussi une suite $\{a_n\}$ telle que pour tout t dans $V_n \setminus V_{n+1}$ [resp. V_{n+1}] un des deux arcs $[t, t+a_n]$ ou $[t-a_n, t]$ est dans $V_n \setminus V_{n+1}$ [resp. V_n].

On déduit donc qu'il existe une suite $\{\varepsilon_n\}$ décroissante telle que

$$P_r(\theta - t) < \frac{1}{4} \quad \text{pour} \quad |r - 1| \leq 2\varepsilon_{n-1}, \quad t \in V_{n+1}, \quad \theta \in T \setminus V_n$$

$$\int_{e^{i\theta} \in V_n \setminus V_{n+1}} P_r(\theta - t) d\theta > \frac{1}{2} \quad \text{pour} \quad 1 - \varepsilon_n \leq r < 1, \quad e^{it} \in V_n \setminus V_{n+1},$$

$$\int_{e^{i\theta} \in V_n} P_r(\theta - t) d\theta > \frac{1}{2} \quad \text{pour} \quad 1 - \varepsilon_n \leq r < 1, \quad e^{it} \in V_{n+1}.$$

On va en déduire des inégalités analogues pour la fonction Q .

Considérons une fonction $\varepsilon(e^{i\theta})$ quelconque, positive, définie sur $T \setminus E$ telle que $\varepsilon(e^{i\theta}) \leq \varepsilon_n$ pour $e^{i\theta}$ dans $V_n \setminus V_{n+1}$.

Alors si $|r - 1|$ est inférieur à ε_n , si $e^{i\theta}$ est dans $T \setminus V_n$ et t dans V_{n+1} , il existe $p \leq n$ tel que $e^{i\theta}$ soit dans $V_{p-1} \setminus V_p$ et on a

$$\left| \frac{r}{1 + \varepsilon(e^{i\theta})} - 1 \right| < |r - 1| + |\varepsilon(e^{i\theta})| \leq \varepsilon_n + \varepsilon_{p-1} \leq 2\varepsilon_{p-1}$$

d'où

$$(*) \quad Q[re^{it}, e^{i\theta}, \varepsilon(e^{i\theta})] < \frac{1}{4} \quad \text{pour} \quad |r - 1| \leq \varepsilon_n, \quad e^{i\theta} \in T \setminus V_n, \quad t \in V_{n+1},$$

et pour toute fonction $\varepsilon(e^{i\theta})$ inférieure à ε_n sur $V_n \setminus V_{n+1}$.

On a aussi

$$(**) \quad \int_{e^{i\theta} \in V_n \setminus V_{n+1}} Q[re^{it}, e^{i\theta}, \varepsilon] d\theta > \frac{1}{2} \quad \text{pour} \quad e^{it} \in V_n \setminus V_{n+1} \quad \text{et tous nombres } r \text{ et } \varepsilon$$

vérifiant $1 - \varepsilon_n < \frac{r}{1 + \varepsilon} < 1$.

D'autre part, $P_r(\theta - t)$ est uniformément continue pour $r \leq 1 - \varepsilon_{n+1}$, $e^{it} \in V_{n+1}$ et $e^{i\theta} \in V_n$; il existe donc une suite décroissante $\{\varepsilon'_n\}$ telle que $m(E)$ étant de mesure nulle,

$$(***) \quad \int_{e^{i\theta} \in V_n \setminus E} Q[re^{it}, e^{i\theta}, \varepsilon(e^{i\theta})] d\theta > \frac{1}{4} \quad \text{pour} \quad 1 - \varepsilon_n \leq r \leq 1 - \varepsilon_{n+1}, \quad e^{it} \in V_{n+1}$$

et pour toute fonction $\varepsilon(e^{i\theta})$ inférieure à ε'_n sur $V_n \setminus E$.

On choisit alors une suite $\{\eta_n\}$ décroissante strictement telle que

$$\eta_n < \inf\{\varepsilon_n, \varepsilon'_n\}; \quad \inf_{\alpha \in V_n \setminus V_{n+1}} \eta(\alpha) \quad \text{et} \quad 1 + \eta_n < \frac{1 - \varepsilon_{n+1}}{1 - \varepsilon_n}.$$

L'ouvert O cherché est l'ensemble des points $z = re^{it}$ tels que :

si t est dans $V_n \setminus V_{n+1}$, $0 \leq r < 1 + \eta_{n+2}$

si t est dans E $r < 1$

O est un ouvert contenant $\bar{D} \setminus E$.

La fonction $\varepsilon(e^{i\theta})$ cherchée est à peu près la fonction constante, égale à η_n sur $V_n \setminus V_{n+1}$, cette fonction étant corrigée, pour la rendre continue, de la façon suivante :

l'ouvert $V_n \setminus V_{n+1}$ est union dénombrable d'intervalles ouverts, soit A_n l'ensemble dénombrable des extrémités de ces intervalles qui appartiennent à V_{n+1} et soit O_n un ouvert de V_n contenant A_n tel que

$$m(O_n) < \frac{1}{8} \sup \left\{ [P_r(\theta - t)]^{-1}, \theta \in V_n \setminus V_{n+1}, t \in V_n \setminus V_{n+1}, r \leq \frac{1+\eta_{n+2}}{1+\eta_{n+1}} \right\}.$$

La fonction $\varepsilon(e^{i\theta})$ est alors définie ainsi :

Sur $V_n \setminus V_{n+1}$ c'est une fonction continue, comprise entre η_n et η_{n+1} , égale à η_n sur $V_n \setminus (V_{n+1} \cup O_n)$ et tendant vers η_{n+1} si $e^{i\theta}$ tend vers A_n .

$\varepsilon(e^{i\theta})$ est bien une fonction continue, strictement positive sur $T \setminus E$.

On pose enfin $W_n = \{re^{it}, e^{it} \in V_{n+1} \mid |r-1| \leq \varepsilon_n\}$.

Alors l'inégalité (*) s'écrit

$$\operatorname{Re} f_1[re^{it}, e^{i\theta}, \varepsilon(e^{i\theta})] < \frac{1}{4} \quad \text{pour} \quad re^{it} \in W_n, e^{i\theta} \in T \setminus V_n,$$

ce qui donne l'inégalité (i) du lemme 3.

D'autre part, d'après le choix des constantes l'inégalité (**) s'écrit

$$\int_{e^{i\theta} \in V_n \setminus V_{n+1}} Q(re^{it}, e^{i\theta}, \eta_n) d\theta > \frac{1}{2} \quad \text{pour} \quad 1 - \varepsilon_{n+1} \leq r \leq 1 + \eta_n$$

or

$$\int_{e^{i\theta} \in V_n \setminus V_{n+1}} Q(re^{it}, e^{i\theta}, \varepsilon(e^{i\theta})) d\theta > \int_{e^{i\theta} \in V_n \setminus V_{n+1}} Q(re^{it}, e^{i\theta}, \eta_n) d\theta - \int_{e^{i\theta} \in (V_n \cap O_n) \setminus V_{n+1}} \left[Q(re^{it}, e^{i\theta}, \eta_n) + Q(re^{it}, e^{i\theta}, \varepsilon(e^{i\theta})) \right] d\theta$$

d'où, d'après le choix de O_n

$$(*) (*) (*) (*) \int_{e^{i\theta} \in V_n \setminus V_{n+1}} Q(re^{it}, e^{i\theta}, \varepsilon(e^{i\theta})) d\theta > \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \text{ pour } 1 - \varepsilon_{n+1} \leq r \leq 1 + \eta_{n+2} \text{ et } e^{it} \in V_n \setminus V_{n+1}.$$

Finalement si $re^{it} \in W_n \cap O$, il existe $p > n$ tel que

$$e^{it} \in V_p \setminus V_{p+1}$$

$$\text{et } 1 - \varepsilon_n \leq r \leq 1 + \eta_{p+2}.$$

Si $1 - \varepsilon_{p+1} \leq r \leq 1 + \eta_{p+2}$ on a, d'après l'inégalité (*),

$$\int_{e^{i\theta} \in V_n} \operatorname{Re} f_1[re^{it}, e^{i\theta}, \varepsilon(e^{i\theta})] d\theta > \int_{e^{i\theta} \in V_p \setminus V_{p+1}} \operatorname{Re} f_1[re^{it}, e^{i\theta}, \varepsilon(e^{i\theta})] d\theta > \frac{1}{4}.$$

Si $1 - \varepsilon_n \leq r < 1 - \varepsilon_{p+1}$, il existe q , $n \leq q < p$ tel que $1 - \varepsilon_q \leq r \leq 1 - \varepsilon_{q+1}$

e^{it} est dans V_{q+1} et on a d'après l'inégalité (**)

$$\int_{e^{i\theta} \in V_n \setminus E} \operatorname{Re} f_1[re^{it}, e^{i\theta}, \varepsilon(e^{i\theta})] d\theta \geq \int_{e^{i\theta} \in V_q \setminus E} \operatorname{Re} f_1[re^{it}, e^{i\theta}, \varepsilon(e^{i\theta})] d\theta > \frac{1}{4}$$

ce qui donne l'inégalité (2) du lemme 3.

Le lemme 3 est donc démontré.

On va maintenant finir la démonstration du théorème 2 en démontrant que la propriété (iii)

du lemme 2 est vérifiée.

Soit donc F une fonction de $I_E(D) \cap \mathcal{C}$, F s'écrit donc

$$F(z) = \exp - \frac{1}{2\pi} \int_{e^{i\theta} \in T} \frac{e^{i\theta+z}}{e^{i\theta-z}} k(\theta) d\theta = \exp - u(z) \quad \text{où } k(\theta) \text{ est réelle intégrable et}$$

$$\operatorname{Re} u(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_{e^{i\theta} \in T} P_r(\theta-t) k(\theta) d\theta.$$

Soit $\varepsilon(\alpha)$ et O_2 la fonction et l'ouvert définis par le lemme 3 et $f = f_1 + f_2$ la fonction définie par le lemme 1 de ce chapitre.

$$\text{On pose } H_i(z) = \exp - \frac{1}{2\pi} \int_{e^{i\theta} \in (T \setminus E)} f_i(z, e^{i\theta}, \varepsilon(e^{i\theta})) k(e^{i\theta}) d\theta = \exp - v_i(z) \quad (i = 1, 2).$$

$\varepsilon(e^{i\theta})$ étant inférieure à $\eta(e^{i\theta})$, on a vu dans le théorème 1 de ce chapitre qu'il existe un ouvert O_1 contenant $\bar{D} \setminus E$ tel que $H_i(z)$ ($i = 1, 2$) appartienne à $H^\infty(O_1)$.

On va voir que, de plus, $H_1(z)$ appartient à $I_E(O_2 \cap O_1)$ i.e. que

$$\operatorname{Re} v_1(z) = \int \operatorname{Re} f_1(z, e^{i\theta}, \varepsilon(e^{i\theta})) d\theta \text{ tend vers } -\infty \text{ si } z \text{ tend vers } E \text{ dans } O_1 \cap O_2 :$$

D'après le théorème de Fatou, $|F(z)|$ a des limites non tangentielles presque partout égales à $\exp - k(e^{i\theta})$. $F(z)$ appartenant à $I_E(D)$, on en déduit que pour tout N , il existe un voisinage V de E dans T tel que $|k(e^{i\theta})| > N$ pour presque tout $e^{i\theta}$ dans V .

Soit W le voisinage correspondant à V donné par le lemme 3.

Alors si $z = re^{it}$ est dans $W \cap O_2$, on a, d'après le lemme 3

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} v_1(re^{it}) &> \left| \int_{e^{i\theta} \in V} Q(re^{it}, e^{i\theta}, \varepsilon(e^{i\theta})) k(\theta) d\theta \right| - \int_{e^{i\theta} \in T \setminus V} Q(re^{it}, e^{i\theta}, \varepsilon(e^{i\theta})) |k(e^{i\theta})| d\theta \\ &> \frac{1}{4} [N - \|k\|_1] ; \end{aligned}$$

donc H_1 est dans $I_E(O_2 \cap O_1)$.

D'autre part, on a vu dans le théorème 1 que la fonction

$$L(z) = \exp - \frac{1}{2\pi} \int_{e^{i\theta} \in E} \frac{e^{i\theta+z}}{e^{i\theta-z}} k(e^{i\theta}) d\theta \text{ est dans } H^\infty(O_1).$$

Finalement, si on note $O = O_1 \cap O_2$ et $G = H_1 H_2 L$.

H_2, L sont dans $H^\infty(O)$, H_1 est dans $I_E(O)$, donc G est dans $I_E(O)$ et G est égale à F sur S . Le théorème est démontré.

On a le corollaire immédiat :

Corollaire 2. $H_E(D) \mid S = A(D) \mid S$.

Nous allons donner une autre démonstration du théorème 2 en caractérisant l'idéal $I_E(D)$ des fonctions de $H_E(D) \mid S$ nulles sur E .

Soit $S = \{\alpha_n ; n \in \mathbb{N}\}$ une suite de Blaschke, E l'ensemble de ses points d'accumulations; on note S_n la suite $\{\alpha_p ; p > n\}$

$$B_n(z) = \prod_{p \leq n} \frac{\bar{\alpha}_p}{\alpha_p} \left(\frac{\alpha_p - z}{1 - \bar{\alpha}_p z} \right) \quad \text{et} \quad {}_n B(z) = \frac{B(z)}{B_n(z)}.$$

Théorème 3. Si l'ensemble E des points d'accumulations de la suite S est de mesure nulle alors

$$I_E(D) \mid S = \left\{ f ; f \in H^\infty(D) \mid S ; \|f\|_{H^\infty(D) \mid S_n} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty \right\}.$$

Soit f un élément de $I_E(D) \mid S$ il existe donc F dans $H_E(D)$, égale à f sur S .

Notons F_n la fonction $F(1 - {}_n B)$. F_n est égale à f sur S_n donc

$$\|f\|_{H^\infty(D) \mid S_n} \leq \|F_n\|_{H^\infty(D)}. \quad \text{Or, pour tout } \varepsilon, F \text{ étant nulle sur } E, \text{ il existe un voisinage}$$

V de E dans $\bar{D}$ tel que $|F(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour z dans $V \cap D$.

Mais la fonction ${}_n B$ converge uniformément vers 1 en dehors de tout voisinage de E , il existe donc N tel que

$$\sup_{z \in D \setminus V} |1 - {}_n B(z)| \leq \frac{\varepsilon}{\|F\|_{H^\infty(D)}}, \quad \text{pour } n \geq N.$$

Donc $\|F_n\|_{H^\infty(D)} < \varepsilon$ si $n \geq N$ et $\|f\|_{H^\infty(D)|_{S_n}} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Réciproquement, considérons une fonction f de $H^\infty(D)|_S$ n'appartenant pas à $I_E(D)|_S$ soit F une fonction de $H^\infty(D)$ telle que $F|_S = f$.

Dire que f n'appartient pas à $I_E(D)|_S$ c'est dire qu'il n'existe pas deux fonctions G_1 et G_2 de $H^\infty(D)$ telles que G_1 soit nulle sur S , G_2 soit dans $I_E(D)$ et F s'écrive $F = G_1 + G_2$; c'est donc dire que F n'appartient pas à l'idéal $I_E(D) + I_S(D)$ où $I_S(D)$ est l'idéal des fonctions de $H^\infty(D)$ nulle sur S .

Or dans l'algèbre $\hat{H}^\infty(D)$ l'idéal $\hat{I}_E(D)$ est l'ensemble des fonctions de $\hat{H}^\infty(D)$ nulles sur l'union des fibres $\mathcal{M}_\alpha$ de $\text{Sp}H^\infty(D)$ pour α dans E . Or F étant un fermé de mesure nulle, $\bigcup_{\alpha \in E} \mathcal{M}_\alpha$ est un ensemble pic. Donc d'après le corollaire 1 du chapitre III, $\hat{I}_E(D) + \hat{I}_S(D)$ est fermé dans $\hat{H}^\infty(D)$.

F n'appartenant pas à l'idéal fermé $I_E(D) + I_S(D)$, il existe donc un nombre a tel que

$$* \quad \|F - G\|_{H^\infty(D)} > a \quad \text{pour tout } G \text{ dans } I_E(D) + I_S(D).$$

D'autre part, pour tout n , il existe d'après le théorème de Rudin une fonction F_n de $A(D)$ telle que $F_n|_E = B_n^{-1}|_E$.

Si G est une fonction de l'idéal $I_{S_n}(D)$ formé des fonctions de $H^\infty(D)$ nulles sur S_n , la fonction $GF_n B_n$ est dans $I_S(D)$ et la fonction $G - GF_n B_n$ est dans $I_E(D)$ donc G est dans $I_E(D) + I_{S_n}(D)$. D'où $I_{S_n}(D) \subset I_E(D) + I_S(D)$ et d'après l'inégalité (*) on a donc

$$\|F - G\|_{H^\infty(D)} > a \quad \text{pour tout } G \text{ dans } I_{S_n}(D).$$

Soit $\|f\|_{H^\infty(D)|S_n} > a$.

Donc si f n'appartient pas à $I_E(D)|S$, $\|f\|_{H^\infty(D)|S_n}$ ne tend pas vers zéro. C.Q.F.D.

On peut alors en déduire le théorème 2 de ce chapitre ; pour cela, il suffit de démontrer la propriété (ii) du lemme 2 de ce chapitre, i.e. qu'il existe un ouvert O contenant $\bar{D} \setminus E$ tel que $I_E(D)|S = I_E(O)|S$.

Soit donc f une fonction de $I_E(D)$. D'après le théorème 3 ci-dessus,

$$\|f\|_{H^\infty(D)|S_n} \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty.$$

D'après le théorème 1 de ce chapitre, il existe un ouvert O_1 contenu dans

$$\mathcal{D} = \{z ; |z| < 2 ; |B(z)| < 2\} \text{ contenant } \bar{D} \setminus E \text{ tel que } H^\infty(O_1)|S = H^\infty(D)|S.$$

On considère alors un ouvert O contenu dans O_1 , connexe, simplement connexe, contenant $\bar{D} \setminus E$ et dont la frontière est une courbe de Jordan rectifiable contenant E et on a aussi $H^\infty(O)|S = H^\infty(D)|S$; ces deux algèbres ont donc des normes équivalentes et donc on a aussi :

$$\|f\|_{H^\infty(O)|S_n} \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty.$$

D'autre part, comme on l'a rappelé dans le lemme 2 de ce chapitre, la représentation conforme τ de O sur D se prolonge en un homéomorphisme de $\bar{O}$ sur $\bar{D}$ qu'on note encore τ et applique l'ensemble E de mesure nulle sur un ensemble E' de τ de mesure nulle. O étant contenu dans $\mathcal{D}$, $B \circ \tau^{-1}$ est une fonction de $H^\infty(D)$ non identiquement nulle sur $\tau(S) = S'$. Donc S' est une suite de Blaschke et on a

$$\|f \circ \tau^{-1}\|_{S'_n} \|H^\infty(D)|S'_n\| = \|f\|_{H^\infty(O)|S_n}$$

donc $\|f \circ \tau^{-1}|_{S'_n}\|_{H^\infty(D)|S'_n}$ tend vers 0 quand on tend vers $+\infty$ et d'après le théorème 3 de ce chapitre $f \circ \tau^{-1}|_{S'_n}$ appartient à $I_{E'}(D)|S$ donc f appartient à $I_E(0)|S$ et donc $I_E(D)|S = I_E(0)|S$. C.Q.F.D.

Chapitre V

Etude de l'algèbre $H_E(D)$

Ce chapitre est consacré à l'étude des algèbres $H_E(D)$ définies dans le chapitre précédent comme étant des sous-algèbres de $H^\infty(D)$ formées des fonctions se prolongeant continuellement à des ensembles E du tore T [cf. rappel IV.1].

Cette étude généralise des résultats connus aussi bien pour l'algèbre $A(D)$ que pour l'algèbre $H^\infty(D)$.

En ce qui concerne, par exemple l'algèbre $H^\infty(D)$, son spectre a été étudié en détail ; un résultat essentiel est le théorème de la "couronne" de Carleson [4] qui dit que le disque unité D est dense dans $SpH^\infty(D)$.

Dans une première partie nous étudierons donc le spectre de $H_E(D)$.

D'autre part, si on se pose le problème de chercher les ensembles pics, clos, ou d'interpolation [cf. N.8, N.9] pour ces algèbres, les théorèmes de Fatou et Rudin donnent la réponse pour l'algèbre $A(D)$. Et pour $H^\infty(D)$, Carleson a caractérisé [18] les suites telles que l'algèbre des restrictions de $H^\infty(D)$ à ces suites soit isomorphe à l'algèbre des suites bornées.

Dans une seconde partie, nous étudierons donc les ensembles d'interpolation et les ensembles pics de $H_E(D)$.

Une étude analogue a été faite et publiée par E. A. Heard et J. Wells [17].

1. Soit E un ensemble de T ; $H_E(D)$ est une sous-algèbre de $H^\infty(D)$.

Rappelons [18, p. 160] que l'application qui à tout m de $SpH^\infty(D)$ fait correspondre le point $m(z)$ est une application continue de $SpH^\infty(D)$ sur $\bar{D}$; elle réalise un homéomorphisme entre D et une partie de $SpH^\infty(D)$. Si α est un point de T , l'ensemble $\mathcal{M}_\alpha = \{m; m \in SpH^\infty(D); m(z) = \alpha\}$ s'appelle la fibre de $SpH^\infty(D)$ au dessus de α . Soit F une fonction de $H^\infty(D)$. On sait que $\frac{1}{|F|}$ (resp. $|F|$) s'étend continuellement en un point α de T si et seulement si $\hat{F}$ est constante sur $\mathcal{M}_\alpha$ (resp. $|\hat{F}|$).

L'algèbre $H_E(D)$ est donc la sous-algèbre de $H^\infty(D)$ formée des fonctions dont les transformées de Gelfand sont constantes sur chaque fibre au-dessus des points de E .

Notons R_E la relation d'équivalence définie sur $SpH^\infty(D)$ par :

$$m R_E m' \iff \exists \alpha \in E, m \in \mathcal{M}_\alpha, m' \in \mathcal{M}_\alpha.$$

$H_E(D)$ est alors la sous-algèbre de $H^\infty(D)$ définie par R_E . Et on va résoudre le problème posé dans un cadre général au chapitre I, de savoir si l'application canonique de $SpH^\infty(D)$ dans $SpH_E(D)$ est surjective.

Nous allons d'abord préciser les propriétés de factorisations des fonctions de $H_E(D)$.

Proposition 1. Soit F une fonction de $H_E(D)$; F s'écrit $F = IG$ où G est une fonction extérieure appartenant à $H_E(D)$ et I une fonction intérieure qui, si F ne s'annule pas sur E , appartient à $H_E(D)$.

Soit F une fonction de $H_E(D)$, F s'écrit (cf. [18]) $F = BKG$ où B est un produit de Blaschke, K une fonction singulière, G une fonction extérieure. Soit α un point de E , comme $|F| \leq |G|$ on a donc $|F(\alpha)| < |\hat{G}(m)|$ pour tout m dans $\mathcal{C}_\alpha$; d'autre part, [18] $|\hat{B}(m)| = |\hat{K}(m)| = 1$ pour m dans Silov $H^\infty(D)$ donc $|\hat{G}(m)| = |F(\alpha)|$ pour m dans Silov $H^\infty(D) \cap \mathcal{C}_\alpha$ or $|\hat{G}(m)| \leq \sup_{x \in \text{Silov } H^\infty(D) \cap \mathcal{C}_\alpha} |\hat{G}(x)| = |F(\alpha)|$ pour m dans $\mathcal{C}_\alpha$ donc

$$|\hat{G}(m)| = |F(\alpha)| \quad \text{pour } m \text{ dans } \mathcal{C}_\alpha.$$

Remarquons qu'on peut aussi démontrer cela en utilisant le théorème de Fatou (comme nous l'avons fait dans le cas où $F(\alpha) = 0$ dans la démonstration du lemme IV.2).

Alors si $F(\alpha) = 0$, $\hat{G}$ est nul sur $\mathcal{C}_\alpha$, donc G se prolonge continuellement à $D \cup \{\alpha\}$. Si $F(\alpha) \neq 0$, F étant continue sur $D \cup \{\alpha\}$, α n'est pas point d'accumulation des zéros de B donc B est continue en α et $|B(\alpha)| = 1$.

D'autre part, pour tout m de $\mathcal{C}_\alpha$, $|\hat{K}(m)| = \frac{|\hat{G}(m)|}{|F(\alpha)|} = 1$; comme on l'a rappelé au début de ce paragraphe, cela signifie que $|K(z)| \rightarrow 1$ lorsque $z \rightarrow \alpha$. On sait alors [18, p. 69] que α ne peut appartenir au support de la mesure singulière définissant K et donc K est continue en α et $|K(\alpha)| = 1$.

G qui est le quotient de fonctions non nulles en α , continues en α est continue en α . Donc dans tous les cas G est dans $H_E(D)$ et si F ne s'annule pas sur E

$I = BK$ est dans $H_E(D)$. C.Q.F.D.

Nous allons maintenant étudier la frontière de Silov de $H_E(D)$.

Pour $H^{\infty}(D)$, la frontière de Silov a été caractérisée par Newman [18] par le fait que les transformées de Gelfand des produits de Blaschke sont de module 1 sur Silov $H^{\infty}(D)$. Pour cette étude, $H^{\infty}(D)$ est considérée, à l'aide du théorème de Fatou comme sous-algèbre de $L^{\infty}(T)$. Nous allons faire une étude analogue pour $H_E^{\infty}(D)$.

Tout d'abord, rappelons que $L^{\infty}(T)$ étant l'algèbre définie dans le rappel 2 du chapitre IV, il existe une projection naturelle de $SpL^{\infty}(T)$ sur T qui à m dans $SpL^{\infty}(T)$ associe le point $m(z)$ de T . L'ensemble $X_{\alpha} = \{m; m \in SpL^{\infty}(T); m(z) = \alpha\}$ s'appelle la fibre de $SpL^{\infty}(T)$ au dessus de α .

Notons alors $L_E^{\infty}(T)$ la sous-algèbre de $L^{\infty}(T)$ formée des éléments de $L^{\infty}(T)$ dont les transformées de Gelfand sont constantes sur chaque fibre X_{α} pour α dans E ; elle est définie par une relation d'équivalence sur $SpL^{\infty}(T)$ et c'est donc une algèbre de Banach. $L_E^{\infty}(T)$ est formée d'éléments qui sont en quelque sorte continus sur E . Plus précisément on a le lemme suivant :

Lemme 1. Soit F un élément de $L_E^{\infty}(T)$; pour tout α dans E et tout ϵ , il existe un arc I_{α} centré en α tel que si λ_{α} est la valeur prise par $\hat{F}$ sur X_{α}

$$\sup_{\beta \in I_{\alpha}} \text{ess} |F(\beta) - \lambda_{\alpha}| < \epsilon .$$

Soit α dans T et ϵ quelconque. Si $\lambda \neq \lambda_{\alpha}$, $z - \alpha$ et $F - \lambda$ n'appartiennent pas à un même idéal propre de $L^{\infty}(T)$; il existe donc g et h dans $L^{\infty}(T)$ tel que $(z - \alpha)g + (F - \lambda)h = 0$; d'où $g = \frac{1 - (F - \lambda)h}{z - \alpha}$ ce qui signifie que $F - \lambda$ est essentiellement borné inférieurement dans un voisinage de α . Il existe donc ϵ_{λ} et un arc $I_{\alpha}(\lambda)$ centré en α tel que $\sup_{\beta \in I_{\alpha}(\lambda)} \text{ess} |F(\beta) - \lambda| > \epsilon_{\lambda}$.

Le fermé $\{|x| \leq \|F\|\} \setminus \{|x - \lambda_\alpha| < \varepsilon\}$ est recouvert par un nombre fini des arcs

$[\lambda - \varepsilon_\lambda, \lambda + \varepsilon_\lambda]$ où $\lambda \neq \lambda_\alpha$. Soit $\lambda_1 \dots \lambda_n$ le centre de ces arcs. Alors si on

pose $I_\alpha = \bigcap_{p=1}^n I_\alpha(\lambda_p)$, on obtient le lemme 1.

Considérons maintenant une fonction de $H_E(D)$; si α est dans E pour tout ε , il existe I_α et r_α tels que $|F(re^{it}) - F(\alpha)| < \varepsilon$ pour $e^{it} \in I_\alpha$, $r_\alpha < r < 1$.

D'après le théorème de Fatou, les limites non tangentielles de F définissent un élément de $L^\infty(T)$ qui appartient alors, d'après le lemme 1, à $L_E(T)$.

$H_E(D)$ s'identifie donc à une sous-algèbre de $L_E(T)$ et on a les inclusions suivantes :

$$\begin{array}{ccc} H_E(D) \subset H^\infty(D) & & \text{Sp}H_E(D) \longleftarrow \text{Sp}H^\infty(D) \\ \cap & \text{d'où les applications} & \uparrow \\ L_E(T) \subset L^\infty(T) & & \text{Sp}L_E(D) \longleftarrow \text{Sp}L^\infty(T) \end{array}$$

$L_E(T)$ et $L^\infty(T)$ sont des C^* algèbres, donc s'identifient par la transformée de Gelfand à l'algèbre de toutes les fonctions continues sur leur spectre.

Notons finalement $H_E(D)^{-1}$ l'ensemble des éléments inversibles de $H_E(D)$ et $\log|H_E(D)^{-1}|$ l'ensemble des logarithmes des modules des éléments inversibles de $H_E(D)$.

On a alors le lemme suivant :

Lemme 2. L'ensemble $\log|H_E(D)^{-1}|$ est dense dans l'ensemble des éléments réels de $L_E(T)$.

Soit F un élément réel de $L_E(T)$, il existe un représentant f de F dans $L^\infty(T)$ qui est réel et tel que $f(\alpha) = \hat{F}(X_\alpha)$ si α est dans E .

Soit ε un nombre quelconque. D'après le lemme 1, pour tout α dans E , il existe un

arc I_α ouvert centré en α et K_α un ensemble de mesure nulle inclus dans I_α tel que

$$|f(\beta) - f(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour } \beta \text{ dans } \bar{I}_\alpha \setminus K_\alpha.$$

Notons O l'ouvert $\bigcup_{\alpha \in E} I_\alpha$ et $K = \bigcup_{\alpha \in E} K_\alpha$.

Alors O est union dénombrable d'arcs fermés dont les intérieurs sont disjoints et dont

l'ensemble des extrémités est sans point d'accumulation dans O . Chacun

de ces arcs fermés est recouvert par un nombre fini d'arcs de la famille $\{I_\alpha; \alpha \in E\}$ donc

est la réunion d'un nombre fini d'arcs fermés d'intérieurs disjoints, contenu chacun

dans un arc $\bar{I}_\alpha$.

O est donc la réunion dénombrable d'arcs fermés J_n d'intérieurs disjoints tels que

l'ensemble des extrémités de ces arcs est sans point d'accumulation dans

O et tels que chaque J_n soit contenu dans ^{un} arc de la famille $\{\bar{I}_\alpha; \alpha \in E\}$. Soit α_n un

point tel que $J_n \subset \bar{I}_{\alpha_n}$; l'ensemble $K' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_{\alpha_n}$ est de mesure nulle.

On peut alors construire une fonction u de $\mathcal{L}^\infty(T)$ continuellement différentiable sur

O réelle, telle que

$$(*) \quad \sup_{z \in T \setminus K'} |u(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

En effet sur $T \setminus O$, on choisit $u = f$.

Sur chaque J_n , on peut choisir u continuellement différentiable égale à f aux extrémi-

tés de J_n , de dérivée nulle en ces extrémités et telle que $|u(\gamma) - f(\alpha_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour γ

dans J_n .

La fonction u satisfait aux conditions cherchées.

Il est alors bien connu que la fonction v conjuguée harmonique de u est continue sur 0 .

La fonction $g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{e^{i\theta} \in T} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} u(e^{i\theta}) d\theta$ est donc dans $H_0(D)$, donc dans $H_E(D)$;
 et $\operatorname{Re} g(re^{it}) = \int_{e^{i\theta} \in T} P_r(0 - t) u(e^{i\theta}) d\theta$.

Posons $G(z) = \exp g(z)$. $G(z)$ est une fonction inversible de $H_E(D)$ et d'après le théorème de Fatou :

$$\operatorname{Log}|G(e^{i\theta})| = u(e^{i\theta}) \text{ pour presque tout } e^{i\theta} \text{ dans } T.$$

Donc d'après l'inégalité (*) ci-dessus $\|\operatorname{Log}|G| - f\|_{L_E(T)} < \varepsilon$. C.Q.F.D.

Quand on considère $H_E(D)$, comme sous-algèbre de $L_E(T)$ donc de $\mathcal{C}(\operatorname{Sp} L_E(T))$, le lemme 2 signifie que $H_E(D)$ est logmodulaire sur $\operatorname{Sp} L_E(T)$ [19] i.e. que l'ensemble $\operatorname{Log}|H_E^{-1}(D)|$ est dense dans $\mathcal{C}_R(\operatorname{Sp} L_E(T))$.

On déduit aussi la proposition suivante :

Proposition 2. L'application canonique φ de $\operatorname{Sp} L_E(T)$ dans $\operatorname{Sp} H_E(D)$ est un homéomorphisme de $\operatorname{Sp} L_E(T)$ sur Silov $H_E(D)$.

Soit m dans $\operatorname{Sp} L_E(T)$ et U un ouvert de $\operatorname{Sp} L_E(T)$ contenant m . D'après le lemme 2, $H_E(D)$ est logmodulaire sur $\operatorname{Sp} L_E(T)$, on peut donc pour tout ε trouver un élément F de $H_E(D)$ tel que sa transformée de Gelfand $\hat{F}$ dans $L_E(T)$ vérifie $\hat{F}(m) = 1$; $\|\hat{F}\| = \|\hat{F}\| < 1 + \varepsilon$; $|\hat{F}| < \varepsilon$ sur $\operatorname{Sp} L_E(T) \setminus U$; ce qui montre que l'application φ est biunivoque et applique $\operatorname{Sp} L_E(T)$ sur Silov $H_E(D)$.

Comme pour $H^{\infty}(D)$ [18] on établit alors les lemmes suivants :

Lemme 3. Soit Φ un élément de $\text{Sp } H_E(D)$ tel que $|\Phi(B)| = 1$ pour tout produit de
Blaschke de $H_E(D)$ alors pour tout F dans $H_E(D)$, $\Phi(F)$ appartient à $\hat{F}$ (Silov $H_E(D)$).

Soit F un élément de $H_E(D)$ telle que $\hat{F}$ ne s'annule pas sur $\text{Silov } H_E(D)$; alors
 l'élément $F(e^{i\theta})$ de $L_E(T)$ défini par les limites radiales de F est inversible dans
 $L_E(T)$ donc essentiellement borné inférieurement sur T .

D'après la proposition IV.1, $F = IG$ où G est une fonction extérieure de $H_E(D)$
 et I une fonction intérieure qui appartient à $H_E(D)$ car F ne s'annule pas sur E .
 Or $|F(e^{i\theta})| = |G(e^{i\theta})|$ et G vérifie l'égalité de Jensen [18]
 $\text{Log}|G(re^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi} \int_{e^{it} \in T} P_r(\theta - t) \text{Log}|G(e^{it})| dt$; donc $|G|$ est borné inférieurement sur
 D et G est inversible dans $H_E(D)$ donc $\Phi(G) \neq 0$. D'autre part, on sait [18] que I
 est limite uniforme sur D de produits de Blaschke $B_n(z) = \frac{I(z) - \alpha_n}{1 - \bar{\alpha}_n I(z)}$, $B_n(z)$ appartient
 aussi à $H_E(D)$ et donc $|\Phi(I)| = \lim |\Phi(B_n)| = 1$, donc $\Phi(F) \neq 0$. C.Q.F.D.

Lemme 4. Soit Φ un élément de $\text{Sp } H_E(D)$ et soit u un élément réel de $L_E(T)$ tel
que $u = \text{Log}|F_u|$ où F_u est dans $H_E^{-1}(D)$ on définit $\ell(u) = \text{Log}|\Phi(F_u)|$.

Alors ℓ s'étend de façon unique en une forme linéaire positive sur $L_E(T)$ dont la
restriction à $H_E(D)$ est Φ .

Remarquons tout d'abord que si $|u| = |\text{Log}|F_u|| \leq 1$ alors $\frac{1}{e} < \Phi(F_u) < e$; d'où
 $|\ell(u)| \leq 1$ donc ℓ est une forme additive bornée par 1 sur $\text{Log}|H_E^{-1}(D)|$.

Montrons maintenant qu'on peut étendre ℓ en une forme additive sur le sous-espace vectoriel réel engendré par $\text{Log}|H_E^{-1}(D)|$ et que sur ce sous-espace, ℓ est bornée par 1 :

Soit u un élément réel de $L_E(T)$ appartenant à ce sous-espace, alors u s'écrit $u = \sum_{j=1}^n t_j u_j$ où $u_j = \text{Log}|F_{u_j}|$ et F_{u_j} est dans $H_E^{-1}(D)$.

Posons $\ell(u) = \sum_{j=1}^n t_j \text{Log} |\Phi(F_{u_j})|$; il s'agit de voir que $\ell(u)$ est indépendant de la décomposition de u :

Si u s'écrit aussi $u = \sum_{j=1}^{n'} t'_j u'_j$ où $u'_j = \text{Log}|F_{u'_j}|$ et $F_{u'_j}$ est dans $H_E^{-1}(D)$, on doit avoir $\sum_{j=1}^n t_j \text{Log} |\Phi(F_{u_j})| = \sum_{j=1}^{n'} t'_j \text{Log} |\Phi(F_{u'_j})|$.

Il suffit de montrer cette égalité dans le cas où les nombres t_j et t'_j sont rationnels ; alors il existe un entier r tel que les nombres $rt_j = p_j$ et $rt'_j = p'_j$ soient entiers.

Les éléments $F = \prod_{j=1}^n (F_{u_j})^{p_j}$ et $F = \prod_{j=1}^{n'} (F_{u'_j})^{p'_j}$ appartiennent à $H_E^{-1}(D)$ et par hypothèse $\log|F| = \log|F'|$, ce qui donne, d'après la définition de ℓ , l'égalité cherchée.

D'autre part, ℓ est évidemment additive sous le sous-espace engendré par $\text{Log} H_E^{-1}(D)$ et elle est aussi bornée par 1 sur ce sous-espace car avec les notations ci-dessus :

$$|\ell(ru)| = |\ell(\text{Log}|F|)| \leq |\text{Log}|F|| = |ru|.$$

ℓ est donc en fait linéaire et positive sur ce sous-espace (qui comme $H_E^{-1}(D)$ est dense dans l'ensemble des éléments réels de $L_E(T)$) car $\ell(1) = \|\ell\| = 1$.

D'après le théorème de Hahn-Banach elle s'étend en une forme linéaire positive sur l'ensemble des éléments réels de $L_E(T)$ et de façon unique à cause de la densité du sous-espace considéré.

Elle s'étend de façon unique à $L_E(T)$ en une forme linéaire positive : pour tout $f = u + iv$ de $L_E(T)$ on pose $\ell(f) = \ell(u) + i \ell(v)$.

Il faut vérifier enfin que la restriction de ℓ à $H_E(D)$ est égale à Φ . Or si F est dans $H_E(D)$, e^F est dans $H_E^{-1}(D)$ et $\operatorname{Re} F = \operatorname{Log}|e^F|$ est dans $\operatorname{Log}|H_E^{-1}(D)|$. On a donc $\ell(\operatorname{Re} F) = \operatorname{Log}|\Phi(e^F)| = \operatorname{Log}|e^{\Phi(F)}| = \operatorname{Re} \Phi(F)$.

D'où $\ell(F) = \Phi(F)$. C.Q.F.D.

Remarque 1. La démonstration de ce lemme reprend celle faite par Hoffman [19] de l'existence pour une algèbre uniforme A , pour tout homomorphisme Φ sur A d'une mesure représentante de Φ sur Silov A qui est de Arens-Singer i. e. telle que

$$\log|\Phi(F)| = \int_{\text{Silov } A} \log|F| dm \quad \text{pour tout } F \text{ inversible de } A.$$

Le lemme est en fait une autre formulation de l'existence de cette mesure, l'unicité découlant de la logmodularité.

Lemme 5. Soit Φ un élément de $\text{SpH}_E(D)$ tel que $|\Phi(B)| = 1$ pour tout produit de Blaschke B de $H_E(D)$ alors Φ est dans $\text{Silov } H_E(D)$.

Soit Φ un tel homomorphisme ; d'après le lemme 3, $\Phi(F)$ appartient à $\hat{F}$ ($\text{Silov } H_E(D)$) donc au spectre de F dans $L_E(T)$ d'après la proposition 2 de ce chapitre. ℓ étant l'application définie dans le lemme 4 précédent, si u est un élément de $L_E(T)$ qui appartient à $\text{Log}|H_E^{-1}(D)|$ on a $u = \text{Log}|F_u|$ où F_u est dans $H_E^{-1}(D)$ et $\ell(u) = \text{Log}|\Phi(F_u)|$ est dans $\text{Log}(\hat{F}(\text{Sp}L_E(T))) = u(\text{Sp}L_E(T))$.

L'ensemble $\text{Log}(H_E^{-1}(D)) + i \text{Log}|H_E^{-1}(D)|$ étant dense dans $L_E(T)$ on en déduit que pour tout f de $L_E(T)$, $\ell(f)$ appartient aussi au spectre de f ; on en déduit que ℓ est un homomorphisme de $L_E(T)$ en utilisant le théorème général suivant démontré indépendamment par A. Gleason [15] et J.-P. Kahane - W. Żelazko [22].

Soit ℓ une forme linéaire continue sur une algèbre de Banach A ; si pour tout élément a de A , $\ell(a)$ appartient au spectre $\hat{a}(\text{Sp}A)$ de a , alors ℓ est un homomorphisme.

Dans le cas de $L_E(T)$ on peut aussi démontrer directement ce théorème. En effet, $\hat{L}_E(T)$ est égale à $\mathcal{C}(\text{Sp}L_E(T))$, ℓ étant une forme linéaire positive sur $L_E(T)$ il existe donc une mesure μ positive sur $\text{Sp}L_E(T)$ telle que pour tout u de $\mathcal{C}(\text{Sp}L_E(T))$ il existe m_u dans $\text{Sp}L_E(T)$ telle que $\int_{\text{Sp}L_E(T)} u(m) d\mu = u(m)$ on en déduit que μ est une masse de Dirac. En effet, sinon il existe deux fermés F_1 et F_2 de $\text{Sp}L_E(T)$, de

μ -mesure positive, deux voisinages ouverts disjoints O_1 et O_2 de F_1 et F_2 , deux fonctions u_1 et u_2 de $\mathcal{C}_R(\text{Sp}L_E(T))$ et un point m_0 de $\text{Sp}L_E(T)$ tels que :

$\mu(O_i \setminus F_i) \leq \frac{1}{2} \mu(F_i)$, $\|u_i\| = 1 = u_i(m)$ pour m dans F_i , $u_i(m) = 0$ pour m dans $\text{Sp}L_E(T) \setminus O_i$, $i = 1, 2$, et

$$\int_{\text{Sp}L_E(T)} u_i(m) + i u_2(m) d\mu = u_1(m_0) + i u_2(m_0).$$

D'où $|u_i(m_0) - \mu(F_i)| = \left| \int_{O_i \setminus F_i} u_i(m) d\mu \right| < \frac{1}{2} \mu(F_i)$, $i = 1, 2$, ce qui est

impossible puisque

$$u_1(m) = 0 \text{ pour } m \text{ dans } O_2 \text{ et}$$

$$u_2(m) = 0 \text{ pour } m \text{ dans } \text{Sp}L_E(T) \setminus O_2.$$

Donc μ est une masse de Dirac et ℓ est un homomorphisme de $L_E(T)$.

On a alors comme pour $H^\infty(D)$ la caractérisation suivante :

Théorème 1. Soit Φ un élément de $H_E(D)$; les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) Φ appartient à Silov $H_E(D)$
- (ii) $|\Phi(B)| = 1$ pour tout produit de Blaschke B de $H_E(D)$
- (iii) $\Phi(B) \neq 0$ pour tout produit de Blaschke B de $H_E(D)$, à zéros simples.

Si (i) est vérifiée, d'après la proposition 2 de ce chapitre, Φ est la restriction d'un homomorphisme sur $L_E(T)$ qui est de module 1 pour tout élément de $L_E(T)$ de module 1 donc (ii) est vérifiée.

D'après le lemme 5 précédent, (ii) implique (i). (ii) implique trivialement (iii).

Il reste à vérifier que (iii) implique (ii).

Supposons donc qu'il existe un homomorphisme Φ tel que (ii) ne soit pas vérifiée ; il existe alors un produit de Blaschke B de $H_E(D)$ tel que $|\Phi(B)| < 1$.

B s'écrit $B(z) = \prod_{n \in \mathbb{N}} \frac{\overline{\beta_n} [\beta_n - z]}{\beta_n [1 - \overline{\beta_n} z]}^{p_n}$, les points β_n sont distincts ; l'ensemble des points d'accumulation de cette suite est disjoint de E et $\sum_{n \in \mathbb{N}} p_n (1 - |\beta_n|) < \infty$.

Choisissons alors une suite $\{q_n ; n \in \mathbb{N}\}$ de nombres positifs, croissante vers $+\infty$ et telle que $\sum p_n q_n [1 - |\beta_n|] < \infty$.

Le produit $A(z)$ défini par

$$A(z) = \prod_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{\overline{\beta_n}}{\beta_n} \left(\frac{\beta_n - z}{1 - \overline{\beta_n} z} \right)^{p_n q_n} \right]$$

est un produit de Blaschke et on va montrer [18] que $\Phi(A) = 0$.

En effet A s'écrit $A = B_N^{q_N} Q_N R_N$ où

$$B_N(z) = \prod_{n \geq N} \frac{\overline{\beta_n} (\beta_n - z)}{\beta_n [1 - \overline{\beta_n} z]}^{p_n}$$

$$Q_N(z) = \prod_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{\overline{\beta_n} (\beta_n - z)}{\beta_n [1 - \overline{\beta_n} z]} \right]^{p_n q_n}$$

$$R_N(z) = \prod_{n \geq N+1} \left[\frac{\overline{\beta_n} (\beta_n - z)}{\beta_n [1 - \overline{\beta_n} z]} \right]^{p_n [q_n - q_N]}.$$

(iii) étant vérifiée, on a en particulier $|\Phi(z)| = 1$, comme $\frac{B}{B_N}(z)$ et $Q_N(z)$ sont des fonctions de $A(D)$ de module 1 sur T on a donc $|\Phi(Q_N)| = |\Phi(\frac{B}{B_N})| = 1$, et

$$|\Phi(R_N)| \leq 1 ; \text{ d'où } |\Phi(B_N)| = |\Phi(B)|.$$

Donc $|\Phi(A)| \leq |\Phi(B)|^{q_N}$; en faisant tendre N vers l'infini on obtient $\Phi(A) = 0$.

Il reste à rendre les zéros de Λ distincts. Pour cela, pour chaque β_n , on choisit

$p_n q_n$ points $\{\gamma_i^n ; i \leq p_n q_n\}$ tels que

. tous les points ainsi obtenus en faisant varier n soient distincts

. l'ensemble des points d'accumulation de cette suite $\{\gamma_i^n\}$ est le même que celui de

la suite $\{\beta_n\}$

. $\left| \frac{\gamma_i^n - \beta_n}{1 - \bar{\gamma}_i^n \beta_n} \right|$ qui est la distance hyperbolique entre γ_i^n et β_n soit inférieure à ε_n ,

la suite ε_n tendant vers zéro assez rapidement de façon que $\|C_N(z) - \Lambda_N(z)\| \rightarrow 0$ si

$N \rightarrow \infty$ où

$$C_N(z) = \prod_{n \leq N} \prod_{i \leq p_n q_n} \left[\frac{\bar{\gamma}_i^n}{|\gamma_i^n|} \frac{(\gamma_i^n - z)}{1 - \bar{\gamma}_i^n z} \right]^{p_n q_n}$$

et

$$\Lambda_N(z) = \prod_{n \leq N} \left[\frac{\bar{\beta}_n}{|\beta_n|} \left(\frac{\beta_n - z}{1 - \bar{\beta}_n z} \right) \right]^{p_n q_n}.$$

Alors le produit de Blaschke C associé à la suite $\{\gamma_i^n\}$ est dans $H_E(D)$ et

$|\Phi(C)| \leq |\Phi(C_N)|$, or $\frac{\Lambda}{\Lambda_N}$ étant une fonction de $\Lambda(D)$ de module 1 sur T on a

$|\Phi(\Lambda_N)| = |\Phi(\Lambda)| = 0$. Donc $|\Phi(C_N)| \rightarrow 0$ pour $N \rightarrow \infty$.

C est un produit de Blaschke à zéros simples tel que $\Phi(C) = 0$, ce qui contredit (iii).

C.Q.F.D.

Remarque 2. Comme nous l'avons dit au début de ce chapitre, cette méthode reprend celle utilisée par Neuman par $H^{\infty}(D)$.

Récemment, R. Douglas-W. Rudin [13] et indépendamment J. P. Rosay [26] ont trouvé une autre

démonstration de la caractérisation de Silov $H^\infty(D)$ en montrant que les produits de Blaschke séparent les points de $\text{Sp}H^\infty(D)$. Ils utilisent pour cela le fait que le spectre de $L^\infty(T)$ est totalement discontinu, ce qui n'est pas le cas des algèbres $L_E^\infty(T)$ considérées ici pour des ensembles E quelconques.

Le problème reste donc posé de savoir si les produits de Blaschke de $H_E(D)$ séparent le spectre de $H_E(D)$.

Nous pouvons maintenant établir le théorème principal de cette première partie :

Théorème 2. L'application canonique $\mathcal{N}$ de $\text{Sp}H^\infty(D)$ dans $\text{Sp}H_E(D)$ est surjective.

Soit Φ un élément de $H_E(D)$, si Φ appartient à Silov $H_E(D)$, on sait [23] que Φ est la restriction d'un homomorphisme sur la suralgèbre $H^\infty(D)$ de $H_E(D)$.

Si Φ n'appartient pas à Silov $H_E(D)$, d'après le théorème 1, il existe un produit de Blaschke B de $H_E(D)$ à zéros simples tel que $\Phi(B) = 0$.

Notons $S = \{\beta_n ; n \in \mathbb{N}\}$ la suite des zéros de B , K l'ensemble des points d'accumulation de S ; K est disjoint de E .

On considère alors l'algèbre de restrictions $H^\infty(D)|_S$; d'après le corollaire 1 du théorème 1 du chapitre IV, on sait que $H^\infty(D)|_S$ est égale à $H_{T \setminus K}(D)|_S$ donc à $H_E(D)|_S$. Les spectres de $H^\infty(D)|_S$ et $H_E(D)|_S$ sont donc isomorphes, l'application $\mathcal{N}$ définissant cet isomorphisme.

Or $\text{Sp}H_E(D)|_S$ est l'adhérence-Zariski $\tilde{S}$ de S dans $\text{Sp}H_E(D)$, i.e. l'ensemble des homomorphismes de $H_E(D)$ annulant toute fonction nulle sur S . Or, si F est une fonction de $H_E(D)$ nulle sur S , F s'écrit $F = BG$ où G est aussi une fonction de $H_E(D)$.

Donc $\Phi(F)$ est nul comme $\Phi(B)$ et Φ appartient à $\tilde{S}$, il est donc l'image par π d'un homomorphisme de $\text{SpH}^{\infty}(D)$. Le théorème est donc démontré.

Le théorème de la couronne de Carleson établit que D est dense dans $\text{SpH}^{\infty}(D)$, le théorème 2 ci-dessus nous donne immédiatement comme corollaire le théorème correspondant pour $H_E(D)$.

Théorème 3. D est dense dans $\text{SpH}_E(D)$.

2. Nous allons maintenant étudier les ensembles d'interpolation et les ensembles pics pour les algèbres $H_E(D)$ dans le cas où E est ouvert dans T .

Une étude de ces ensembles a été faite indépendamment par E. A. Heard - J. Wells [17].

Définition 1. Un fermé relatif de $D \cup E$ est d'interpolation pour $H_E(D)$ si $H_E(D)|_F = \mathcal{C}_b(F)$.

Remarque 3. $\mathcal{C}_b(F)$ et $H_E(D)$ étant des espaces de Banach, d'après le théorème du graphe fermé, F est d'interpolation par $H_E(D)$ si et seulement si il existe une constante μ telle que pour toute fonction f de $\mathcal{C}_b(F)$, il existe une fonction F de $H_E(D)$ avec

$$\|F\| \leq \mu \sup_{z \in F} |f(z)|.$$

Nous allons généraliser des résultats connus pour $A(D)$ et $H^{\infty}(D)$.

Pour l'algèbre $A(D)$, les théorèmes de Fatou et Rudin [18] établissent que tout fermé K de mesure nulle sur T est un ensemble pic et d'interpolation pour $A(D)$ et même plus précisément, comme on l'a rappelé au début du chapitre III, pour tout f dans $C(K)$, tout ϵ

et tout voisinage V de K dans C , il existe F dans $A(D)$ telle que

$$F|_K = f$$

$$\|F\| = \sup_{z \in K} |f(z)|$$

$$|F(z)| < \epsilon \text{ pour } z \text{ dans } \bar{D} \setminus V.$$

Pour $H^\infty(D)$ Carleson a caractérisé les suites S du disque telles que

$H^\infty(D)|_S \sim \ell^\infty$; ce sont les suites de Blaschke $S = \{\alpha_n; n \in \mathbb{N}\}$ telles que

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \prod_{p \neq n} \left[\frac{\alpha_p - \alpha_n}{1 - \bar{\alpha}_p \alpha_n} \right] > 0. \text{ De telles suites sont dites d'interpolation, et pour de telles suites}$$

leur adhérence $\bar{S}$ dans $\text{SpH}^\infty(D)|_S$ est d'interpolation au sens général des algèbres

uniformes, i. e. $\hat{H}^\infty(D)|_{\bar{S}} = \mathcal{C}(\bar{S})$. [18].

Lemme 6. Soit K et K' deux fermés de T disjoints de mesure nulle. Pour tout voisinage ouvert V de K dans C , pour tout $\eta < 1$, il existe deux fonctions g et g' de $A(D)$ telle que

$$\|g\| = \|g'\| = 1$$

$$g(z) = g'(z) = 0 \text{ pour } z \text{ dans } K$$

$$g(z) = 1 \text{ pour } z \text{ dans } K'$$

$$|\arg g(z)| < \eta \text{ pour } z \text{ dans } \bar{D}$$

$$|g'(z) - 1| < \eta \text{ pour } z \text{ dans } \bar{D} \setminus V$$

$$|g(z) - 1| < \eta \text{ pour } z \text{ dans } \bar{D} \setminus V.$$

L'existence de g' est due au théorème de Rudin rappelé ci-dessus.

D'autre part, la démonstration du théorème de Fatou [18, p.80] utilise l'existence d'une fonction h de $A(D)$ de norme égale à 1 nulle exactement sur K et dont la partie

réelle est positive sur $\bar{D}$; il existe alors un entier p tel que la fonction $g = h^{\frac{1}{p}}$ de $\Lambda(D)$ vérifie les conditions du lemme. C.Q.F.D.

Remarque 4. Comme dans la démonstration du lemme 2 de ce chapitre, si F est un fermé de T tel que $m(F \cap E) = 0$, l'ouvert E est réunion dénombrable d'arcs fermés I_n dont les intérieurs sont disjoints et dont l'ensemble des extrémités est sans point d'accumulation dans E et ne coupe pas F . Posons $K_n = I_n \cap F$.

$E \cap F$ est alors union des compacts K_n et la distance de chacun de ces compacts à tous les autres est strictement positive et tout point de E est adhérent à, au plus, un de ces compacts.

On en déduit que si V est un voisinage de $F \cap E$ dans C , il existe une suite U_n d'ouverts disjoints tels que tout point de $D \cup E$ est adhérent à, au plus, un des ouverts U_n , $U_n \supset K_n$ pour tout n et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \subset V$.

Proposition 3. Soit E un ouvert de T et F un fermé de T tels que $m(F \cap E) = 0$.

Pour tout voisinage V de $F \cap E$ dans C , il existe G dans $H_E(D)$ tels que

$$G(z) = 1 = \|G\| \quad \text{pour } z \text{ dans } F \cap E$$

$$|G(z)| < \frac{1}{2} \quad \text{pour } z \text{ dans } D \setminus V.$$

D'après la remarque 4 ci-dessus, $F \cap E$ est l'union de compacts disjoints K_n et on peut supposer que $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ où les U_n sont des ouverts disjoints tels que $U_n \supset K_n$ pour tout n , et que tout point de $D \cup E$ soit adhérent à, au plus, un des ouverts $\{U_n ; n \in \mathbb{N}\}$.

Soit η un nombre quelconque.

D'après les conditions (i), (iii), (iv) du lemme 6 ci-dessus, il existe alors pour tout n

une fonction g_n de $\Lambda(D)$ telle que

$$\|g_n\| \leq 1$$

$$g_n(z) = 0 \text{ pour } z \text{ dans } K_n$$

$$|\arg(g_n(z))| < \frac{1}{2^n} \text{ pour } z \text{ dans } \bar{D}$$

$$|g_n(z) - 1| < \frac{\eta}{2^n} \text{ pour } z \text{ dans } \bar{D} \setminus U_n.$$

Considérons le produit $\prod_{n \in \mathbb{N}} g_n(z)$; tout point de $\bar{D}$ (resp. de $D \cup E$) appartenant à au plus, un ouvert U_n (resp. l'adhérence d'un ouvert U_n) on déduit que le produit converge en tout point de $\bar{D}$ et uniformément sur les compacts de $D \cup E$, donc il définit une fonction de $H_E(D)$ de norme inférieure ou égale à 1.

De plus $|\arg g(z)| < 1$ pour z dans $\bar{D}$, donc $\operatorname{Re} g(z) \gg 0$ pour z dans $\bar{D}$ et on peut choisir η de façon que

$$|1 - g(z)| = |1 - \prod_{n \in \mathbb{N}} g_n(z)| \leq 1 - \log \frac{1}{2} \text{ pour } z \text{ dans } \bar{D} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n.$$

On pose $G = e^{-g}$; G est une fonction de $H_E(D)$ de norme 1 égale à 1 sur $F \cap E$ et

$$|G(z)| = e^{\operatorname{Re} g(z)} < e^{\log \frac{1}{2}} < \frac{1}{2} \text{ pour } z \text{ dans } D \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n. \text{ C.Q.F.D.}$$

Remarque 5. Si F' est un fermé contenu dans E et disjoint de F , en remplaçant dans la démonstration ci-dessus les fonctions g_n par des fonctions g'_n de $\Lambda(D)$ données aussi par le lemme 6 et vérifiant

$$\|g'_n\| = 1 = g'_n(z) \text{ pour } z \text{ dans } F'$$

$$g'_n(z) = 0 \text{ pour } z \text{ dans } K_n$$

$$|g'_n(z) - 1| < \frac{1}{2^n} \quad \text{pour } z \text{ dans } \bar{D} \setminus U_n.$$

Alors le produit $\prod_{n \in \mathbb{N}} g'_n(z)$ définit comme ci-dessus une fonction g' de $H_E(D)$ et on a

$$\|g'\| = 1 = g(z) \quad \text{pour } z \text{ dans } F'$$

$$g'(z) = 0 \quad \text{pour } z \text{ dans } F \cap E.$$

On en déduit aussi les proposition et corollaire suivants :

Proposition 4. Soit E un ouvert de T et F un fermé de T tel que $m(F \cap E) = 0$,

alors dans l'algèbre $H_{E \setminus F}(D)$, l'adhérence $\overline{\bigcup_{\alpha \in E \cap F} \mathcal{I}_\alpha}$ dans $\text{SpH}_{E \setminus F}(D)$ de l'union des fibres $\mathcal{I}_\alpha$ de $H_{E \setminus F}(D)$ pour α dans $E \cap F$ est un ensemble pic.

Considérons un voisinage ouvert U de $\overline{\bigcup_{\alpha \in E \cap F} \mathcal{I}_\alpha}$; il existe un ouvert O de $\mathbb{C}$ contenant $E \cap F$ tel que $U \cap D = O \cap D$. Soit G la fonction de $H_E(D)$ donc de $H_{E \setminus F}(D)$ définie dans la proposition 3 précédente, correspondant à cet ouvert O , en particulier $\hat{G}(m) = 1 = \|G\|$ pour m dans $\bigcup_{\alpha \in E \cap F} \mathcal{I}_\alpha$.

Si m est un point de $\text{SpH}_{E \setminus F}(D)$ n'appartenant pas à U , il existe un voisinage $V(m)$ disjoint de U ; D étant dense dans $\text{SpH}_{E \setminus F}(D)$ (d'après le théorème³⁾ de ce chapitre), m appartient à l'adhérence $\overline{V(m) \cap D}$ de $V(m) \cap D$ dans $\text{SpH}_{E \setminus F}(D)$.

Or $V(m) \cap D \cap O \cap D = \emptyset$; donc $|G(z)| < \frac{1}{2}$ pour z dans $V(m) \cap D$ donc $\hat{G}(m) < \frac{1}{2}$.

G vérifie donc $\hat{G}(m) = 1 = \|G\|$ pour m dans $\overline{\bigcup_{\alpha \in F \cap E} \mathcal{I}_\alpha}$

$$|G(m)| < \frac{1}{2} \quad \text{pour } m \text{ dans } \text{SpH}_{E \setminus F}(D) \setminus U.$$

Donc $\overline{\bigcup_{\alpha \in F \cap E} \mathcal{I}_\alpha}$ est un ensemble pic.

Corollaire 1. Soit O un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant $E \cap F$; l'adhérence $\overline{O \cap D}$ de $O \cap D$

dans $\text{SpH}_{E \setminus F}(D)$ est un voisinage de $\bigcup_{\alpha \in F \cap E} \overline{D_\alpha}$.

En effet, sinon considérons la fonction G donnée par la proposition précédente correspondant à l'ouvert O , $\hat{G}$ est inférieure à $\frac{1}{2}$ sur $\overline{D \setminus O}$ et égale à 1 sur $\overline{\bigcup_{\alpha \in F \cap E} D_\alpha}$; donc l'ensemble $\{m; \hat{G}(m) > \frac{2}{3}\}$ est un ouvert de $\text{SpH}_{E \setminus F}(D)$ contenant $\overline{\bigcup_{\alpha \in F \cap E} D_\alpha}$ et contenu dans $\overline{O \cap D}$. C.Q.F.D.

Proposition 5. Soit E un ouvert de T , F un fermé, les deux propriétés sont équivalentes :

$$(i) \quad m(F \cap E) = 0$$

$$(ii) \quad H_E(D)|_{F \cap E} = \mathcal{C}_b(F \cap E).$$

Si $m(F \cap E)$ est positive, il existe une fonction de $\mathcal{C}_b(F \cap E)$ non identiquement nulle, nulle sur un ensemble de mesure positive et cette fonction ne peut être la restriction à $F \cap E$ d'une fonction de $H_E(D)$.

Supposons donc $m(F \cap E)$ nul. Soit f une fonction de $\mathcal{C}_b(F \cap E)$;

$$\|f\| = \sup_{z \in F \cap E} |f(z)|.$$

D'après la remarque 4 de ce chapitre, $F \cap E$ est l'union de compacts K_n disjoints et il existe une suite U_n d'ouverts deux à deux disjoints tels que $U_n \supset K_n$ et tout point de $D \cup E$ est adhérent à au plus un des ouverts U_n .

D'après le théorème de Rudin rappelé au début de ce paragraphe, il existe une suite g_n de fonctions de $A(D)$ telle que

$$g_n(z) = f(z) \quad \text{pour } z \text{ dans } K_n$$

$$|g_n(z)| < \frac{1}{2^n} \quad \text{pour } z \text{ dans } \overline{U_n}$$

$$\|g_n\| = \sup_{z \in K_n} |f(z)| \leq \|f\|.$$

D'après la remarque 5 de ce chapitre, il existe une suite $g'_n(z)$ de $A(D)$ telle que

$$g'_n(z) = 0 \quad \text{pour } z \text{ dans } \bigcup_{p \neq n} K_p$$

$$g'_n(z) = 1 \quad \text{pour } z \text{ dans } K_n$$

$$\|g'_n\| = 1.$$

Considérons la somme $\sum_{n \in \mathbb{N}} g_n(z) g'_n(z)$; cette somme converge en tout point de $\bar{D}$ et uniformément sur les compacts de $D \cup E$; et les sommes partielles sont bornées par $\|f\|$; cette somme définit donc une fonction de $H_E(D)$ de norme égale à $\|f\|$ et qui est égale à f sur $F \cap E$. C.Q.F.D.

On peut alors déduire le théorème principal de cette partie.

Théorème 5. Soit E un ouvert de T ; un fermé relatif F de $D \cup E$ est d'interpolation pour $H_E(D)$ si et seulement si

- (i) $F \cap D$ est une suite d'interpolation pour $H^\infty(D)$
- (ii) $m(F \cap E) = 0$.

On voit, comme dans la proposition 5 ci-dessus, que (ii) est une condition nécessaire.

D'autre part, si F est d'interpolation pour $H_E(D)$, $F \cap D$ est une suite de Blaschke, sinon en considérant une sous-suite $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$ non de Blaschke, une fonction de $\mathcal{C}_b(F)$ nulle sur $\{x_n ; n > 1\}$ non nulle sur x_1 ne peut être la restriction d'une fonction de $H_E(D)$. $F \cap D$ est donc une suite de Blaschke $S = \{\alpha_n ; n \in \mathbb{N}\}$. Considérons alors une suite $\{c_n\}$ bornée ; si F est d'interpolation pour l'algèbre $H_E(D)$, d'après la remarque 3 de ce

chapitre, il existe une constante μ et une suite $\{F_n ; n \in \mathbb{N}\}$ de $H_E(D)$ telle que

$$F_n(\alpha_p) = c_p, \quad p \leq n$$

$$F_n(z) = 0 \quad \text{pour } z \text{ dans } F \setminus \{\alpha_p ; p \leq n\}$$

$$\|F_n\| < \mu.$$

D'après la propriété de Montel, il existe une sous-suite de la suite $\{F_n\}$ convergeant sur tout compact de D vers une fonction F de $H^\infty(D)$ qui vérifie $F(\alpha_n) = c_n$. $F \cap D$ est donc une suite d'interpolation pour $H^\infty(D)$. Donc (ii) est vérifiée.

Réciproquement, supposons que (i) et (ii) soient vérifiées. Soit f une fonction de $\mathcal{C}_b(F)$. Notons S la suite d'interpolation pour $H^\infty(D)$, $F \cap D$, et $\bar{S}$ l'adhérence de S dans $\bar{D}$.

Tout d'abord, d'après la proposition⁵⁾ ci-dessus, il existe G_1 dans $H_E(D)$ tel que $G_1|_{F \cap E} = f|_{F \cap E}$.

D'autre part, d'après le théorème 1 du chapitre IV, l'algèbre $H_{T \setminus \bar{S}}(D)|_S$ est égal à $H^\infty(D)|_S$ donc à $H_{E \setminus F}(D)|_S$. S étant une suite d'interpolation, ces algèbres sont isomorphes à ℓ^∞ ; ce qui signifie que, comme dans le cas de $H^\infty(D)$ rappelé au début de ce paragraphe, l'adhérence $\bar{S}$ de S dans $\text{Sp}H_{E \setminus F}(D)$ est un ensemble d'interpolation pour $H_{E \setminus F}(D)$ au sens général des algèbres uniformes, et qu'il existe une fonction G_2 de $H_{E \setminus F}(D)$ égale à $f - G_1$ sur S .

Nous allons montrer que $\hat{G}_2$ est nul sur $\bar{S} \cap \overline{\bigcup_{\alpha \in E \cap F} \mathcal{F}_\alpha}$, où $\mathcal{F}_\alpha$ est la fibre de $\text{Sp}H_{E \setminus F}(D)$ au-dessus de α :

En effet, soit m un point de $\bar{S} \cap \overline{\bigcup_{\alpha \in E \cap F} \mathcal{I}_\alpha^p}$ et soit ε un nombre quelconque, $f - G_1$ étant une fonction continue sur $S \cup E$, nulle sur $\bar{S} \cap E$, il existe un ouvert O de C contenant $F \cap E$ tel que

$$|G_2(z)| = |f(z) - G_1(z)| < \varepsilon \text{ pour } z \text{ dans } S \cap O$$

or $m(F \cap E)$ étant nul, d'après le corollaire 1 ci-dessus, l'adhérence $\bar{O}$ de O dans

$\text{SpH}_{E \setminus F}^{(D)}$ est un voisinage de $\overline{\bigcup_{\alpha \in E \cap F} \mathcal{I}_\alpha^p}$ donc de m . Donc m qui est adhérent à S

dans $\text{SpH}_{E \setminus F}^{(D)}$ est adhérent à $S \cap \bar{O} = S \cap O$; donc $|\hat{G}_2(m)| < \varepsilon$ pour tout ε .

$$\hat{G}_2 \text{ est donc nul sur } \bar{S} \cap \overline{\bigcup_{\alpha \in E \cap F} \mathcal{I}_\alpha^p}.$$

Or dans l'algèbre $H_{E \setminus \bar{S}}^{(D)}$, $\bar{S}$ est un ensemble clos puisque d'interpolation (cf. N.9)

et d'après la proposition V.4 $\overline{\bigcup_{\alpha \in E \setminus F} \mathcal{I}_\alpha^p}$ est un ensemble pic.

Alors d'après la proposition 4 du chapitre III, $\hat{G}_2$ étant nulle sur l'intersection de ces

deux ensembles, G_2 s'écrit $G_2 = G_3 + G_4$ où G_3 et G_4 sont deux fonctions de $H_{E \setminus F}^{(D)}$

telles que

$$\hat{G}_3(m) = 0 \text{ pour } m \text{ dans } \bar{S}$$

$$\hat{G}_4(m) = 0 \text{ pour } m \text{ dans } \overline{\bigcup_{\alpha \in E \cap F} \mathcal{I}_\alpha^p},$$

ce qui signifie que G_4 se prolonge continuellement à $E \cap F$ donc est en fait une fonction de

$H_E^{(D)}$ nulle sur F et égale à G_2 sur S .

Finalement la fonction $G = G_4 + G_1$ appartient à $H_E^{(D)}$ et la restriction de G à f

sur F . C.Q.F.D.

Chapitre VI

Comparaison d'algèbres de restrictions de sous-algèbres de $H^{\infty}(D)$

1. Soit A une algèbre de Banach de fonctions continues sur un compact X munie d'une norme notée $\|f\|_A$ telle que $\|f\|_A \geq \sup_{x \in X} |f(x)|$ pour tout f de A .

On définit

$$\tilde{A} = \left\{ f ; f \in \mathcal{C}(X) ; \exists M, \exists f_n \in A, \|f_n\|_A < M, \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty \right\}.$$

$\tilde{A}$ est une algèbre qui est de Banach si on la munit de la norme suivante :

$$\|f\|_{\tilde{A}} = \inf \left\{ M ; \exists f_n \in A ; \|f_n\|_A < M, \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty \right\} \text{ pour tout } f \text{ de } \tilde{A}.$$

On a toujours $A \subseteq \tilde{A}$ et si A est uniforme sur X , $A = \tilde{A}$.

Les algèbres $\tilde{A}$ ont été étudiées en particulier par N. Varopoulos [31] dans le cadre des algèbres de groupe et des algèbres tensorielles.

Ici nous allons nous intéresser aux algèbres A qui sont des restrictions d'algèbres uniformes. Un problème est de déterminer si A peut être égal à $\tilde{A}$ dans le cas où A n'est pas uniforme. Nous allons résoudre ce problème pour les algèbres restrictions de l'algèbre $A(D)$.

Dans tout ce chapitre K désigne un fermé de $\bar{D}$ et on pose

$$S = K \cap D \quad \text{et} \quad E = K \cap T.$$

On note aussi

$A(K)$ l'algèbre de Banach des restrictions à K de l'algèbre $A(D)$, munie de la norme quotient

$\tilde{A}(K)$ l'algèbre correspondant à $A(K)$ par la définition ci-dessus.

Alors pour tout f de $\tilde{A}(K)$ on a :

$$\|f\|_{\tilde{A}(K)} = \inf \left\{ M ; \exists F_n \in A(D) \ \|F_n\|_{A(D)} < M ; \sup_{z \in K} |F_n(z) - f(z)| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty \right\}.$$

Dans ce chapitre nous allons montrer le théorème suivant :

Théorème 1. $A(K) = \tilde{A}(K)$ si et seulement si $A(K)$ est uniforme sur K .

Si f est dans $\tilde{A}(K)$, il existe M et une suite $\{F_n ; n \in \mathbb{N}\}$ de fonctions de $A(D)$ telles que $\|F_n\|_{A(D)} < M$ et $\sup_{z \in K} |F_n(z) - f(z)| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

D'après la propriété de Montel, il existe une sous-suite de la suite $\{F_n ; n \in \mathbb{N}\}$ qui converge uniformément sur tout compact de D vers une fonction G de $H^\infty(D)$ qui vérifie en particulier $G|_S = f|_S$. f est donc une fonction continue sur K telle que $f|_S$ soit dans l'algèbre de restriction de $H^\infty(D)$ à S qu'on notera $H^\infty(S)$.

On définit alors

$$B(K) = \{f, f \in \mathcal{C}(K) ; f|_S \in H^\infty(S)\}$$

$B(K)$ est une algèbre de Banach munie de la norme

$$\|f\|_{B(K)} = \sup \left\{ \|f\|_{H^\infty(S)}, \|f\|_{\mathcal{C}(K)} \right\} \text{ pour tout } f \text{ de } B(K) \text{ et } \|f\|_{H^\infty(S)}$$

désignant la norme quotient sur $H^\infty(S)$.

Nous allons comparer les trois algèbres $A(K)$, $\tilde{A}(K)$, $B(K)$. D'après ce qui précède,

on a : $A(K) \subsetneq \tilde{A}(K) \subsetneq B(K)$.

Pour cette étude nous allons distinguer deux cas : $m(E) > 0$ et $m(E) = 0$.

2. Nous supposons dans toute cette partie que $m(E)$ est positif.

Si $E = T$, $A(K)$ est uniforme sur K , donc $A(K) = \tilde{A}(K)$.

Si E est différent de T , on considère un produit de Blaschke C dont la suite des zéros $\{\gamma_n ; n \in \mathbb{N}\}$ s'accumulent en un point γ de T n'appartenant pas à E . Les produits partiels $C_N(z) = \prod_{n \in \mathbb{N}} \frac{\bar{\gamma}_n}{|\gamma_n|} \left(\frac{\gamma_n - z}{1 - \bar{\gamma}_n z} \right)$ sont des fonctions de $A(D)$ de norme 1, convergeant vers $C(z)$ uniformément sur tout compact de $\bar{D}$ disjoint de γ donc sur K ; donc $C|_K$ est dans $\tilde{A}(K)$ mais $C|_K$ n'appartient pas à $A(K)$ car $m(E)$ est positive et C n'est pas dans $A(D)$. Donc $A(K) \neq \tilde{A}(K)$.

Pour comparer $\tilde{A}(K)$ et $A(K)$ avec $B(K)$ nous allons regarder la façon dont les points de E sont adhérents à S .

Nous rappelons qu'un point $e^{i\theta}$ est dit adhérent non tangentielllement à un ensemble S de D s'il est adhérent à l'intersection de S et d'un secteur de sommet $e^{i\theta}$, symétrique par rapport au rayon issu de $e^{i\theta}$ et d'angle au sommet inférieur à π .

Proposition 1. S'il existe un ensemble de E de mesure positive formé de points qui ne sont pas adhérents non tangentielllement à S , alors il existe dans $B(K)$ une fonction nulle sur un ensemble de mesure positive de T , non identiquement nulle sur E , et ne s'annulant pas sur S .

En effet, pour tout point

$e^{i\theta}$ de E' , il existe donc α_θ tel que le triangle isocèle T_θ de sommet $e^{i\theta}$, d'angle en ce sommet égal à $\frac{\pi}{2}$, et de hauteur issue de ce sommet égale à α_θ , ne contienne aucun point de S .

Si on considère une suite α_n tendant vers zéro et si on note E_n l'ensemble des points $e^{i\theta}$ de E tel que α_θ soit supérieur à α_n , alors $\bigcup E_n = E$, il existe donc n tel que $m(E_n)$ soit positive.

En notant E' un fermé de mesure positive strictement inférieure à $m(E_n)$, on voit qu'il existe un nombre α tel que pour tout point $e^{i\theta}$ d'un fermé E' de mesure positive vérifiant $m(E \setminus E') > 0$, les triangles correspondant dont l'angle au sommet $e^{i\theta}$ est égal à $\frac{\pi}{2}$ et la hauteur à α_0 ne contiennent aucun point de S .

$T \setminus E'$ est un ouvert réunion dénombrable d'arcs disjoints I_n et $\sum_{n \in \mathbb{N}} m(I_n) < 1$.

On considère alors une suite $\{a_n ; n \in \mathbb{N}\}$ tendant vers l'infini telle que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} m(I_n) a_n < \infty.$$

On peut définir sur chaque arc I_n une fonction u_n continuellement différentiable, positive, intégrable, supérieure à a_n , tendant vers $+\infty$, aux extrémités de l'arc I_n et telle que

$$\int_{e^{i\theta} \in I_n} u_n(e^{i\theta}) d\theta \leq 2 m(I_n) a_n.$$

On définit alors une fonction u sur T :

$$\begin{aligned} u(e^{i\theta}) &= u_n(e^{i\theta}) && \text{pour } e^{i\theta} \text{ dans } I_n \\ u(e^{i\theta}) &= 0 && \text{pour } e^{i\theta} \text{ dans } E'. \end{aligned}$$

La fonction u est continuellement différentiable sur $T \setminus E'$, positive et

$$\int_{e^{i\theta} \in T} u(e^{i\theta}) d\theta = \sum_{n \in N} \int_{e^{i\theta} \in I_n} u_n(e^{i\theta}) d\theta \leq 2 \sum_{n \in N} m(I_n) a_n < \infty \quad \text{donc } u \text{ est intégrable.}$$

Soit $e^{i\theta_0}$ est un point de E' et N un entier quelconque, il existe n tel que $a_p > N$ pour tout $p > n$; et $e^{i\theta_0}$ est adhérent à au plus un des arcs I_p , $p \leq n$. Soit I_{p_0} cet arc; d'après le choix de u_n , il existe un voisinage V de $e^{i\theta_0}$ dans T tel que $u_{p_0}(e^{i\theta}) > N$ pour $e^{i\theta}$ dans $V \cap I_{p_0}$ et $V \cap I_p = \emptyset$, $p \leq n$, $p \neq p_0$. D'où $u(e^{i\theta}) > N$ pour $e^{i\theta} \in V \cap (T \setminus E')$.

Donc $u(e^{i\theta})$ tend vers $+\infty$ lorsque $e^{i\theta}$ tend vers un point de E' en restant dans $T \setminus E'$.

On note v la fonction conjuguée de u et on pose

$$F(re^{i\theta}) = \exp - \frac{1}{2\pi} \int_{e^{it} \in T} [u(e^{it}) + iv(e^{it})] P_r(\theta - t) dt.$$

u étant positive et intégrable, F est une fonction de $H^\infty(D)$ de norme inférieure à 1 et u étant continuellement différentiable sur $T \setminus E'$, F se prolonge continuellement à $T \setminus E'$ donc appartient à $H_{T \setminus E'}(D)$ et ne s'annule pas sur $T \setminus E'$.

F ne s'annule pas sur $K \cap D$ et $m(E \setminus E')$ étant positive F n'est pas identiquement nulle sur E .

Nous allons montrer que $F|_S$ se prolonge en une fonction de $B(K)$.

F appartenant à $H_{T \setminus E'}(D)$, il suffira en fait de montrer que $F(re^{i\theta})$ tend vers zéro lorsque $re^{i\theta}$ tend vers un point de E' en restant dans $K \setminus E'$.

Or, d'après le choix de u , si $e^{i\theta_0}$ est un point de E' et N un nombre quelconque, il existe un arc $V = [e^{i\theta_0 - \varepsilon}, e^{i\theta_0 + \varepsilon}]$ tel que $u(e^{i\theta}) > N$ pour $e^{i\theta} \in V \cap (T \setminus E')$.

D'autre part, d'après le choix de E' , tout point $re^{i\theta}$ de $K \setminus E'$ vérifiant $1 > r > 1 - \alpha$ et $|e^{i\theta} - e^{i\theta_0}| < \frac{\varepsilon}{2}$, appartient à un triangle Δ dont l'un des côtés est un arc J contenu dans $I_n \cap V$ pour un certain n et dont les demi-autres côtés forment un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec les rayons issus des extrémités de l'arc J .

On a alors :

$$|F(re^{i\theta})| = \exp - \frac{1}{2\pi} \int_{e^{it} \in T} u(e^{it}) P_r(\theta - t) dt$$

$$|F(re^{i\theta})| = \exp - \frac{1}{2\pi} \int_{e^{it} \in J} u(e^{it}) P_r(\theta - t) dt \quad \exp - \frac{1}{2\pi} \int_{e^{it} \in T \setminus J} u(e^{it}) P_r(\theta - t) dt$$

$$|F(re^{i\theta})| \leq \exp - \frac{N}{2\pi} \int_{e^{it} \in J} P_r(\theta - t) dt.$$

Or $\frac{1}{2\pi} \int_{e^{it} \in J} P_r(\theta - t) dt$ est la longueur de l'arc dont les extrémités sont les points où les droites joignant $re^{i\theta}$ aux extrémités de l'arc J recoupent le cercle ; la valeur minimum lorsque $re^{i\theta}$ est dans Δ est obtenue lorsque $re^{i\theta}$ est au sommet de Δ opposé à J et cette valeur y est supérieure à $\frac{1}{2}$.

Donc $|F(re^{i\theta})| \leq \exp - \frac{N}{2}$ pour tout $re^{i\theta}$ de K vérifiant $r > 1 - \alpha_0$, $|e^{i\theta} - e^{i\theta_0}| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$F(re^{i\theta})$ tend donc vers zéro lorsque $re^{i\theta}$ tend vers un point de $T \setminus E''$ en restant dans $K \setminus E'$.

F définit donc une fonction f de $B(K)$ nulle sur le fermé E' de mesure positive, f n'est pas identiquement nulle sur E et f ne s'annule pas sur S . C.Q.F.D.

Théorème 2. Si $E = T$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $A(K) = B(K)$
- (ii) Presque tout point de T est adhérent non tangentiellement à S .

En effet, supposons que (ii) soit vérifiée. Soit f une fonction de $B(K)$ et F dans $H^{\infty}(D)$ telle que $F|_S = f|_S$. Les limites radiales de F qui existent en presque tout point de T sont alors égales en presque tout point à la valeur de f en ce point. F est donc l'intégrale de Poisson de la fonction continue f et donc appartient à $A(D)$; d'où f est dans $A(K)$.

Si (ii) n'est pas vérifiée d'après la proposition 1 précédente, il existe une fonction f de $B(K)$ non identiquement nulle sur K et nulle sur un ensemble de mesure positive ; cette fonction ne peut alors appartenir à $A(K)$ et donc $A(K) \neq B(K)$. C.Q.F.D.

Les ensembles S ayant la propriété (ii) du théorème précédent, ont été introduits par L. Brown, A. Shields, K. Zeller [3], qui ont montré par une méthode analogue à celle utilisée dans la proposition 1 ci-dessus que la propriété (ii) caractérise les ensembles S de D tels que $\|F\|_{H^{\infty}(D)} = \sup_{z \in S} |F(z)|$ pour tout F de $H^{\infty}(D)$.

Les ensembles S ayant la propriété (ii) jouent en quelque sorte un rôle analogue au cercle unité T . Le théorème 1 ci-dessus en est une autre illustration.

La proposition suivante donne un résultat partiel dans le cas où $E \neq T$.

Proposition 2. Si $\tilde{A}(K) = B(K)$, alors presque tout point de E est adhérent non tangentiellement à S .

En effet, sinon, d'après la proposition 1 ci-dessus, il existe une fonction f de $B(K)$ non identiquement nulle sur E , ne s'annulant pas sur S tel que f soit nulle sur un ensemble de mesure positive E' .

Remarquons que S ne peut pas être vide, sinon par définition on a $\tilde{A}(K) = B(K) = \mathcal{C}(K)$; or si $\tilde{A}(K)$ est égal à $\mathcal{C}(K)$, les normes de ces deux algèbres sont équivalentes et donc une boule de $A(K)$ est dense dans la boule unité de $\mathcal{C}(K)$, on en déduit que $A(K)$ est aussi égal à $\mathcal{C}(K)$ ce qui est impossible car $m(E)$ est positive.

Il existe donc un point $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ dans $K \cap D$ et $f(z_0) \neq 0$.

Si f appartient à $\tilde{A}(K)$, il existe une suite $\{F_n ; n \in \mathbb{N}\}$ de fonctions de $A(D)$ et une constante M telles que

$$\|F_n\|_{A(D)} \leq M$$

$$\sup_{z \in K} |F_n(z) - f(z)| < \frac{1}{n} ; \text{ en particulier } |F_n(e^{i\theta})| < \frac{1}{n} \text{ pour } e^{i\theta} \text{ dans } E'.$$

D'après l'inégalité de Jensen [18] on a

$$\begin{aligned} \text{Log}|F_n(z_0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{e^{i\theta} \in T} \text{Log}|F_n(e^{i\theta})| P_{r_0}(\theta_0 - \theta) d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{e^{i\theta} \in E'} \text{Log}|F_n(e^{i\theta})| P_{r_0}(\theta_0 - \theta) d\theta + \frac{\text{Log } M}{2} \int_{e^{i\theta} \in T \setminus E'} P_{r_0}(\theta_0 - \theta) d\theta \\ &\leq -\frac{\text{Log } n}{2\pi} \int_{e^{i\theta} \in E'} P_{r_0}(\theta_0 - \theta) d\theta + \text{Log } M. \end{aligned}$$

E' étant de mesure positive, si on fait tendre n vers l'infini on obtient

$$\text{Log}|f(z_0)| = -\infty \text{ ce qui est impossible puisque } f(z_0) \neq 0.$$

Donc f n'est pas dans $\tilde{A}(K)$ et $\tilde{A}(K) \neq B(K)$. C.Q.F.D.

Réciproquement, je ne sais pas, dans le cas où E est différent de T , si le fait que tout point de E soit adhérent non tangentiellement à S entraîne que $\tilde{A}(K) = B(K)$.

Dans le cas, particulier, où E est un arc fermé, si tout point de E est adhérent non tangentiellement à S , cela entraîne que pour toute fonction f de $B(K)$, la fonction F de $H^\infty(D)$ égale à f sur S a des limites radiales qui sont continues sur E donc F appartient au moins à $H_{\frac{0}{E}}^0$ où $\overset{0}{E}$ est l'arc ouvert d'adhérence E .

On a alors $B(K) = \tilde{A}(K)$ car on peut montrer que la propriété d'approximation suivante qui est valable (dans le cas où E est vide) pour $H^\infty(D)$ est valable :

Toute fonction de $H_E(D)$ est limite d'une suite de fonctions de $A(D)$ bornées uniformément, convergeant uniformément sur tout compact de $D \cup E$.

On obtient comme cas particulier des propositions précédentes :

Proposition 3 : Si S est une suite de Blaschke telle que $m(\bar{S} \cap T)$ soit positive alors $\tilde{A}(K) \neq B(K)$.

Si S est une suite de Blaschke $\{\alpha_n, n > 1\}$; notons A le produit de Blaschke associé à la suite $\{\alpha_n ; n > 1\}$. On définit f par $f(\alpha_1) = A(\alpha_1)$

$$f(\alpha_n) = 0 \text{ pour } n > 1$$

$$f(e^{i\theta}) = 0 \text{ pour } e^{i\theta} \text{ dans } E.$$

f est donc une fonction de $B(K)$ qui est nulle sur $\bar{S} \cap T$ donc comme dans les démonstrations du théorème 1 et de la proposition 2 on conclut que $\tilde{A}(K) \neq B(K)$.

3. On suppose dans cette partie que $m(E)$ est nulle.

Proposition 4 : $\tilde{A}(K) = B(K)$.

Soit f un élément de $B(K)$; $m(E)$ étant nul, il existe une fonction G de $A(D)$ égale à f sur E et il suffit de montrer que $f - G|_K$ est dans $\tilde{A}(K)$. On peut donc supposer que f est nulle sur E .

Soit n un entier quelconque, f étant continue sur K nulle sur E , il existe p_1 tel que

$$|f(\alpha_p)| < \frac{1}{2n} \text{ pour } p > p_1.$$

E étant un ensemble pic pour $A(D)$, il existe une fonction G_n de $A(D)$ de norme 1 égale à 1 sur E telle que

$$G_n(\alpha_p) < \frac{1}{2n\|f\|_{B(K)}}, \quad p \leq p_1.$$

Il existe alors p_2 tel que

$$|G_n(\alpha_p) - 1| < \frac{1}{4n\|f\|_{B(K)}} \text{ pour } p > p_2.$$

Il existe aussi une fonction F de $H^\infty(D)$ tel que $F|_S = f$ et $\|F\|_{H^\infty(D)} \leq 2\|f\|_{B(K)}$ et les fonctions $F_p(z) = F((1 - \frac{1}{p})z)$ sont des fonctions de $A(D)$ convergeant uniformément sur tout compact de D vers F de norme égale à $\|F\|$.

Il existe donc m tel que

$$|F_m(\alpha_p) - F(\alpha_p)| < \frac{1}{4^n} \text{ pour } p \leq p_2.$$

Posons alors $H_n(z) = (1 - G_n(z))F_m(z)$.

H_n est une fonction de $A(D)$ telle que

$$\|H_n\|_{A(D)} \leq 4\|f\|_{B(K)}$$

$$H_n(z) = 0 = f(z) \text{ pour } z \text{ dans } E.$$

$$\text{Si } p > p_2, \quad |H_n(\alpha_p) - f(\alpha_p)| \leq |1 - G_n(\alpha_p)| \|F\| + |f(\alpha_p)| < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}.$$

$$\text{Si } p_1 < p < p_2, \quad |H_n(\alpha_p) - f(\alpha_p)| \leq \|1 - G_n\| |F_m(\alpha_p) - F(\alpha_p)| + \|G_n\| |F(\alpha_p)| \leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}.$$

$$\text{Si } p \leq p_1, \quad |H_n(\alpha_p) - f(\alpha_p)| = |F_m(\alpha_p) - F(\alpha_p)| + |G_n(\alpha_p)| \|F_m\| \leq \frac{1}{4n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}.$$

Il existe donc une suite H_n de fonctions de $A(D)$ telles que

$$\|H_n\|_{A(D)} \leq 2\|f\|_{B(K)}$$

$$\sup_{z \in K} |H_n(z) - f(z)| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

f appartient donc à $\tilde{A}(K)$.

On en déduit le résultat connu [18, p. 208] :

Corollaire 1 : Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) K est d'interpolation pour $A(D)$ (i. e. $A(K) = \mathcal{C}(K)$)
- (ii) S est d'interpolation pour $H^\infty(D)$ (i. e. $H^\infty(S) \sim \ell^\infty$).

En effet, d'après la propriété de Montel, on a : (i) $\implies$ (ii).

D'autre part, si (ii) est vérifiée, on a $\tilde{A}(K) = B(K) = \mathcal{C}(K)$, on en déduit, comme on l'a signalé au début de la démonstration de la proposition 2 ci-dessus, que $A(K) = \mathcal{C}(K)$.

C.Q.F.D.

Si S n'est pas une suite de Blaschke, on considère la fonction de $H^\infty(D)$,

$$F(z) = \exp \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \quad \text{où } e^{i\theta} \text{ n'appartient pas à } E; \quad F|_K \text{ est dans } B(K) \text{ mais non dans}$$

$A(K)$ car F n'appartient pas à $A(D)$. Donc dans ce cas $\tilde{A}(K) = B(K) \neq A(K)$.

Il reste donc à étudier le cas où $S = \{\alpha_n; n \in \mathbb{N}\}$ est une suite de Blaschke qui n'est pas d'interpolation pour $H^\infty(D)$.

Notons : $S_n = \{\alpha_p ; p \geq n\}$; $b_p(z) = \frac{\bar{\alpha}_p}{|\alpha_p|} \frac{\alpha_p - z}{1 - \bar{\alpha}_p z}$

$$B(z) = \prod_{p \in \mathbb{N}} b_p(z) \quad ; \quad B_n(z) = \prod_{p \leq n} b_p(z) \quad ; \quad {}_n B(z) = \frac{B(z)}{B_n(z)}$$

$$A_n(z) = \prod_{p \neq n} b_p(z) \quad ; \quad A_n(\alpha_n) = a_n.$$

Rappelons [18] que les suites S d'interpolation pour $H^\infty(D)$ sont caractérisées par

le fait que $\inf_{n \in \mathbb{N}} |a_n| > 0$.

Soit $H_E(D)$ l'algèbre définie au chapitre IV, formée des fonctions de $H^\infty(D)$ se prolongeant continuellement à E ; on note aussi $H_E(K)$ l'algèbre des restrictions de $H_E(D)$ à K et d'après les théorèmes 1 et 2 du chapitre IV, on a :

$$H_E(K) = A(K)$$

$$H^\infty(S) = H_{T \setminus E}(S).$$

On note finalement $I_A(K)$ (resp. $I_B(K)$) (resp. $I_{H_E}(K)$) l'idéal des éléments de $A(K)$ (resp. $B(K)$) (resp. $H_E(K)$) nuls sur E . On a aussi $I_A(K) = I_{H_E}(K)$ et d'après le théorème

3 du chapitre IV, les fonctions f de $I_A(K)$ sont caractérisées par le fait que

$$\|f|_{S_n}\|_{H^\infty(S_n)} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

On va montrer qu'il n'en est pas de même pour $I_B(K)$:

Proposition 5 : Si S est une suite de Blaschke non d'interpolation pour $H^\infty(D)$, il existe f dans $I_B(K)$ tel que $\|f|_{S_n}\|_{H^\infty(S_n)} \geq 1$ pour tout n .

S n'étant pas une suite d'interpolation pour $H^\infty(D)$, il existe une sous-suite

$$L = \{n_p ; p \in \mathbb{N}\} \text{ telle que } |a_{n_p}| < \frac{1}{p}.$$

Comme toute suite de Blaschke contient une suite d'interpolation [18] on peut donc

supposer que la suite α_{n_p} est d'interpolation ; il existe donc $\delta > 0$ tel que

$$\prod_{k \neq p} b_{n_k}(\alpha_{n_p}) > \delta \text{ pour tout } p.$$

Notons $C(z)$ le produit de Blaschke $C(z) = \prod_{n \notin L} b_n(z)$.

Soit f la fonction définie sur K par

$$f(z) = 0 \text{ pour } z \text{ dans } E$$

$$f(\alpha_n) = C(\alpha_n) \text{ pour tout } n.$$

Montrons tout d'abord que f est dans $I_B(K)$; en effet, $C(\alpha_n) = 0$ pour $n \notin L$

$$\text{et } |a_{n_p}| = |C(\alpha_{n_p})| \times \prod_{k \neq p} b_{n_k}(\alpha_{n_p}) \text{ pour tout } p$$

d'où $|C(\alpha_{n_p})| < \frac{1}{p\delta}$ et $C(\alpha_n) \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow \infty$: f appartient donc à $I_B(K)$.

D'autre part, n étant fixé, considérons une fonction F quelconque de $H^\infty(D)$ telle que $F|_{S_n} = f|_{S_n}$. En particulier $F(\alpha_p) = 0$ pour tout p supérieur à n , n appartenant pas à L .

Il existe donc une fonction G de $H^\infty(D)$ telle que $F = {}_nC G$ où ${}_nC$ est le produit de Blaschke ${}_nC(z) = \prod_{\substack{k \notin L \\ k > n}} b_k(z)$.

$$\text{On a alors } {}_nC(\alpha_p) \times G(\alpha_p) = F(\alpha_p) \quad ; \quad \text{soit } G(\alpha_p) = \frac{C}{{}_nC}(\alpha_p).$$

Or la fonction $\frac{C}{{}_nC}$ est un produit de Blaschke fini qui tend en module vers 1 lorsque $|z|$ tend vers 1. Donc $|G(\alpha_p)| \rightarrow 1$ lorsque $p \rightarrow \infty$. Or $\|F\|_{H^\infty(D)} = \|G\|_{H^\infty(D)} > |G(\alpha_p)|$; d'où $\|F\|_{H^\infty(D)} \geq 1$ pour tout F dans $H^\infty(D)$ telle que $F|_{S_n} = f|_{S_n}$. La proposition est donc démontrée.

En utilisant les propositions ci-dessus, ainsi que la caractérisation rappelée ci-dessus des fonctions de $I_A(K)$ on a immédiatement le théorème suivant :

Théorème 3 : $\tilde{A}(K)$ (qui est égale à $B(K)$) est égale à $A(K)$ (qui est égale à $H_E(K)$) si et seulement si S est une suite d'interpolation pour $H^\infty(D)$.

On peut montrer aussi un théorème plus général :

Théorème 4 : Si S n'est pas d'interpolation pour $H^\infty(D)$, l'algèbre de Banach $B(K)$ n'est pas séparable.

Démonstration.

D'après les propriétés des produits de Blaschke, on sait que pour tout n , il existe n' tel que $|B(\alpha_n)| > \frac{1}{2}$ pour $k > n'$

$$|B_n(\alpha_k)| > \frac{1}{2} \text{ pour } k > n'.$$

Il existe donc un entier m_2 appartenant à la suite $L = \{n_p ; p \in \mathbb{N}\}$ considérée dans la démonstration de la proposition 15 ci-dessus tel que

$$|B_{n_1}(\alpha_{m_2})| > \frac{1}{2}.$$

Il existe alors m_3 dans L tel que

$$|B_{m_2}(\alpha_{m_3})| > \frac{1}{2}$$

$$|B_{m_3}(\alpha_{m_2})| > \frac{1}{2}.$$

On construit ainsi par récurrence une sous-suite $L' = \{m_p ; p \in \mathbb{N}\}$ de la suite L , telle que

$$|B_{m_p}(\alpha_{m_{p+1}})| > \frac{1}{2}$$

$$|B_{m_{p+1}}(\alpha_{m_p})| > \frac{1}{2}.$$

Notons :

$$C'(z) = \prod_{n \notin L'} b_n(z)$$

$$T_p = \{\alpha_n ; m_{p-1} < n \leq m_{p+1}\}.$$

Pour toute partie J de N on définit sur K la fonction f_J par

$$f(z) = 0 \quad \text{pour } z \text{ dans } E$$

$$f_J(\alpha_n) = C'(\alpha_n) \prod_{k \in J} b_{m_k}(\alpha_n) \quad \text{pour tout } n.$$

On a : $|f_J(\alpha_n)| < |C'(\alpha_n)| < |C(\alpha_n)|$. Donc f_J est dans $I_B(K)$, car $C(\alpha_n)$ tend vers zéro, lorsque $n \rightarrow \infty$.

D'autre part, si J et J' sont deux parties différentes de N , il existe par exemple p appartenant à J' et non à J . Alors $\|f_J - f_{J'}\|_{B(K)} \geq \|f_J - f_{J'}\|_{H^\infty(T_p)}$.

Considérons une fonction F quelconque de $H^\infty(D)$ telle que

$$F|_{T_p} = (f_J - f_{J'})|_{T_p};$$

en particulier

$$F(\alpha_n) = 0 \quad \text{pour } \alpha_n \in T_p \setminus \{\alpha_{m_p}\}$$

$$F(\alpha_{m_p}) = f_J(\alpha_{m_p}).$$

Il existe donc une fonction G de $H^\infty(D)$ telle que

$$F(z) = G(z) \prod_{\substack{m_{p-1} < n \leq m_{p+1} \\ n \neq m_p}} b_n(z)$$

d'où

$$|G(\alpha_{m_p})| \times \prod_{\substack{m_{p-1} < n \leq m_{p+1} \\ n \neq m_p}} |b_n(\alpha_{m_p})| = \prod_{k \in J} b_{m_k}(\alpha_{m_p}) \times \prod_{n \notin L'} b_n(\alpha_{m_p})$$

soit

$$|G(\alpha_{m_p})| \geq \prod_{n > m_{p+1}} b_n(\alpha_{m_p}) \times \prod_{n \leq m_{p-1}} b_n(\alpha_{m_p}) \geq \frac{1}{4}$$

d'où

$$\|F\| = \|G\| > \frac{1}{4}, \quad \text{et donc} \quad \|f_J - f_{J'}\|_{B(K)} > \frac{1}{4}.$$

Lorsque J parcourt l'ensemble des parties de N , les fonctions f_J forment un ensemble non dénombrable d'éléments de $B(K)$ dont les distances sont supérieures à $\frac{1}{4}$; donc $B(K)$

n'est pas séparable. C.Q.F.D.

En remarquant que $A(K)$, qui est un espace quotient de l'espace séparable $A(D)$ est séparable, on retrouve comme corollaire de ce théorème 4 le théorème 3 ci-dessus.

Si on s'intéresse à la norme des injections canoniques données par les inclusions $A(K) \subseteq \tilde{A}(K) \subseteq B(K)$, on obtient la proposition suivante :

Proposition 6 : Les injections $A(K) \longrightarrow \tilde{A}(K)$ et $A(K) \longrightarrow B(K)$ sont isométriques.

Il suffit de montrer que pour tout f dans $A(K)$ on a :

$$\|f\|_{A(K)} = \|f\|_{B(K)}.$$

Or si f est dans $A(K)$, il existe F dans $A(D)$ telle que $F|_K = f$ et

$$\|f\|_{A(K)} = \inf \left\{ \|F + G\|_{A(D)} ; G \in A(D) ; G|_S = 0 \right\}$$

$$\|f\|_{B(K)} = \inf \left\{ \|F + G\|_{H^\infty(D)} ; G \in H^\infty(D) ; G|_S = 0 \right\}.$$

En remarquant que les fonctions de $A(D)$ qui sont nulles sur S sont les fonctions de $A(D)$ qui s'écrivent BG où G est dans l'idéal $I_A(D)$ des fonctions de $A(D)$ nulles sur E , on obtient :

$$\|f\|_{A(K)} = \inf \left\{ \|F + BG\|_{A(D)} ; G \in I_A(D) \right\} = \inf \left\{ \left\| \frac{F}{B} + G \right\|_{L^\infty(T)} ; G \in I_A(D) \right\}$$

$$\|f\|_{B(K)} = \inf \left\{ \|F + BG\|_{H^\infty(D)} ; G \in H^\infty(D) \right\} = \inf \left\{ \left\| \frac{F}{B} + G \right\|_{L^\infty(T)} ; G \in H^\infty(D) \right\}.$$

Ce qui signifie que $\|f\|_{A(K)}$ (resp. $\|f\|_{B(K)}$) est la norme de $\frac{F}{B}$ dans l'espace quotient $L^\infty(T)/I_A(D)$ [resp. $L^\infty(T)/H^\infty(D)$], donc ($L^\infty(T)$ étant le dual de $L^1(T)$) est la norme de $\frac{F}{B}$ comme forme linéaire sur l'orthogonal $(I_A(D))^\perp$ (resp. $(H^\infty(D))^\perp$) de $I_A(D)$ (resp. $H^\infty(D)$) dans $L^1(T)$.

Montrons que $(I_A(D))^{\perp} = (H^{\infty}(D))^{\perp} : (H^{\infty}(D))^{\perp}$ est l'ensemble $H_0^1(D)$ des fonctions de $L^1(T)$ telles que $\int_{e^{i\theta} \in T} f(e^{i\theta})g(e^{i\theta})d\theta = 0$ pour tout g dans $A(D)$ [18].

Soit alors f un élément de $(I_A(D))^{\perp}$ et g une fonction de $A(D)$ et ε quelconque.

f étant dans $L^1(T)$ et E étant de mesure nulle, il existe un voisinage V de E dans T tel que $\int_{e^{i\theta} \in V} |f(e^{i\theta})|d\theta < \frac{\varepsilon}{2\|g\|_{A(D)}}$.

D'après le théorème de Rudin, il existe g' dans $A(D)$ telle que

$$g'|_E = g|_E$$

$$\|g'\| = \|g\|$$

$$|g'(e^{i\theta})| \leq \frac{\varepsilon}{2\|f\|_{L^1(T)}} \quad \text{pour } e^{i\theta} \in T \setminus V$$

alors

$$\left| \int_{e^{i\theta} \in T} f(e^{i\theta})g(e^{i\theta})d\theta \right| = \left| \int_{e^{i\theta} \in T} f(e^{i\theta})g'(e^{i\theta})d\theta \right| \leq$$

$$\|g'\| \int_{e^{i\theta} \in V} |f(e^{i\theta})|d\theta + \sup_{e^{i\theta} \in T \setminus V} |g'(e^{i\theta})| \|f\|_{L^1(T)} < \varepsilon \quad \text{pour tout } \varepsilon$$

donc $\int_{e^{i\theta} \in T} f(e^{i\theta})g(e^{i\theta})d\theta = 0$ pour tout g dans $A(D)$

d'où $(I_A(D))^{\perp} = (H^{\infty}(D))^{\perp} = H_0^1(D)$.

On en déduit que $\|f\|_{A(K)}$ est égal à $\|f\|_{B(K)}$ comme norme d'une forme linéaire sur le même espace $H_0^1(D)$. C.Q.F.D.

Finalement, en remarquant que $A(K)$ est uniforme sur K , si et seulement si, ou bien

$E = T$, ou bien $m(E) = 0$ et S est d'interpolation pour $H^{\infty}(D)$, on obtient comme conclusion

de l'étude faite, et en particulier de la proposition 1 et du théorème 3, le théorème 1 énoncé au début de ce chapitre.

4. Etude des spectres de $A(K)$ et $\tilde{A}(K)$.

On suppose dans cette partie que $S = \{\alpha_n ; n \in \mathbb{N}\}$ est une suite de Blaschke dont l'ensemble E des points d'accumulation sur T est de mesure nulle.

Proposition 7. Si S est une suite non d'interpolation, l'application canonique π de $\text{Sp } \tilde{A}(K) = \text{Sp } B(K)$ dans $\text{Sp } A(K)$ est surjective mais suivant les cas peut être ou ne pas être injective.

K étant alors fermé-Zariski pour $A(D)$ le spectre de $A(K)$ est K . $B(K)$ est une sous-algèbre de l'algèbre $H^\infty(S)$ dont le spectre est l'adhérence-Zariski $\tilde{S}$ de S dans $\text{Sp}H^\infty(D)$.

Nous allons étudier le cas où E est réduit à un point α .

Si F est une fonction de $H^\infty(D)$ telle que $F|_S$ soit dans $B(K)$ alors $F(\alpha_n)$ tend vers une limite λ quand n tend vers l'infini. $\bar{S}$ désignant l'adhérence topologique de S dans $\text{Sp}H^\infty(D)$ (qui est contenue dans $\tilde{S}$) et $\mathcal{M}_\alpha$ la fibre de $\text{Sp}H^\infty(D)$ au-dessus de α tout point Φ de $\bar{S} \cap \mathcal{M}_\alpha$ est point d'accumulation pour S donc $\hat{F}(\Phi) = \lambda$.

Réciproquement, si F est une fonction de $H^\infty(D)$ telle que $\hat{F}$ soit égale à une constante λ sur $\bar{S} \cap \mathcal{M}_\alpha$, alors $F(\alpha_n) \rightarrow \lambda$ quand $n \rightarrow \infty$: en effet, sinon il existerait une sous-suite $S' = \{\beta_n ; n \in \mathbb{N}\}$ de S et un nombre λ' différent de λ tel que $F(\beta_n) \rightarrow \lambda'$ quand $n \rightarrow \infty$, donc comme on l'a vu ci-dessus $\hat{F}$ serait égal à λ' sur

$\bar{S}' \subset \bar{S}$, ce qui n'est pas possible.

$B(K)$ est donc la sous-algèbre de $H^{\infty}(S)$ formée des fonctions dont la transformée de Gelfand dans $H^{\infty}(S)$ est constante sur $\bar{S} \cap \mathcal{M}_{\alpha}$.

D'après l'étude faite au chapitre I, le spectre de $B(K)$ est donc l'espace quotient de $\tilde{S}$ par la relation d'équivalence qui identifie à un point tous les points de l'adhérence-Zariski de $\bar{S} \cap \mathcal{M}_{\alpha}$ dans $\text{Sp } H^{\infty}(S)$.

Donc $\text{Sp } B(K) \simeq \frac{\tilde{S}}{\bar{S} \cap \mathcal{M}_{\alpha}}$ où $\tilde{S} \cap \mathcal{M}_{\alpha}$ est l'adhérence-Zariski de $\bar{S} \cap \mathcal{M}_{\alpha}$ dans $\text{Sp } H^{\infty}(D)$.

L'application canonique π de $\text{Sp } \tilde{A}(K) = \frac{\text{SU}(\tilde{S} \cap \mathcal{M}_{\alpha})}{\bar{S} \cap \mathcal{M}_{\alpha}}$ dans $\text{Sp } A(K) \sim S \cup \{\alpha\}$ est donc surjective. Elle est biunivoque sur S et envoie les points de $\frac{\tilde{S} \cap \mathcal{M}_{\alpha}}{\bar{S} \cap \mathcal{M}_{\alpha}}$ au point α .

Cette application sera donc injective si et seulement si $\tilde{S} \cap \mathcal{M}_{\alpha} = \bar{S} \cap \mathcal{M}_{\alpha}$. Si $\bar{S} = \tilde{S}$ alors $\tilde{S} \cap \mathcal{M}_{\alpha} = \bar{S} \cap \mathcal{M}_{\alpha} = \bar{S} \cap \mathcal{M}_{\alpha}$ et l'application π est bijective.

Par exemple si S est une suite d'interpolation $\tilde{S} = \bar{S}[18]$ donc π est bijective (ce qui découle aussi directement du fait que dans ce cas $A(K) = B(K)$).

Or, si S est une suite non d'interpolation qui est l'union de deux suites d'interpolation S_1 et S_2 [18, p. 208], alors d'après le théorème 1 de ce chapitre $A(K)$ est strictement contenu dans $\tilde{A}(K) = B(K)$ et $\tilde{S} = \tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_2 = \bar{S}_1 \cup \bar{S}_2 = \bar{S}$ donc $\tilde{S} \cap \mathcal{M}_{\alpha} = \bar{S} \cap \mathcal{M}_{\alpha}$ et l'application est bijective.

Nous allons maintenant montrer qu'il existe des suites S telles que l'application π ne soit pas bijective.

Pour cela il suffit de montrer qu'il existe un produit de Blaschke C associé à une suite

S tel que $\bar{S} \cap T = \{\alpha\}$, une fonction F de $H^\infty(D)$, et un point Φ_0 de $\mathcal{M}_\alpha$, tels que

$$\hat{F}(\Phi) = 0 \text{ pour } \Phi \text{ dans } \bar{S} \cap \mathcal{M}_\alpha$$

$$\hat{C}(\Phi_0) = 0$$

$$\hat{F}(\Phi_0) \neq 0.$$

En effet, alors le point Φ_0 sera dans $\mathcal{M}_\alpha \cap \tilde{S}$ et non dans $\widetilde{\bar{S} \cap \mathcal{M}_\alpha}$.

Pour cela considérons une suite $Q = \{\alpha_n ; n \in \mathbb{N}\}$ de Blaschke et le produit de Blaschke

associé F . On a montré dans la démonstration du théorème 1 du chapitre V qu'il existait

une suite $S = \{\gamma_n ; n \in \mathbb{N}\}$ de Blaschke (obtenue en ajoutant beaucoup de points autour de

chaque point de Q) telle que si C est le produit de Blaschke associé à S , alors

$$\Phi(C) = 0 \text{ pour tout } \Phi \text{ dans } \text{Sp } H^\infty(D) \text{ tel que } |\Phi(F)| < 1 \text{ et}$$

$$F(\gamma_n) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

$$\text{Donc } \hat{F}(\Phi) = 0 \text{ pour } \Phi \text{ dans } \bar{S} \cap \mathcal{M}_\alpha.$$

Et si on considère un point Φ_0 de $\mathcal{M}_\alpha$ tel que $|\Phi_0(F)|$ soit inférieur à 1 et non

$$\text{nul. On a } \hat{C}(\Phi_0) = 0$$

$$\hat{F}(\Phi_0) \neq 0 \quad \text{C.Q.F.D.}$$

L'étude des spectres de $A(K)$ et $B(K)$ conduit donc à la comparaison des trois ensembles

$$\bar{S} \cap \mathcal{M}_\alpha, \quad \widetilde{\bar{S} \cap \mathcal{M}_\alpha}, \quad \tilde{S} \cap \mathcal{M}_\alpha.$$

Nous allons voir que si $\bar{S} \neq \tilde{S}$, $\widetilde{\bar{S} \cap \mathcal{M}_\alpha}$ n'est pas toujours fermé-Zariski.

Si S est une suite de Blaschke obtenue à partir d'une suite d'interpolation en rajoutant comme précédemment beaucoup de points autour de chaque point de Q , on a $\bar{Q} = \bar{S}$ et d'autre part $\bar{Q} = \tilde{Q}$; donc $\bar{S} \cap \mathcal{M}_\alpha$ est égal à $\tilde{Q} \cap \mathcal{M}_\alpha$ et est fermé-Zariski.

Supposons maintenant que α étant égal à 1, $S = \{\alpha_n ; n \in \mathbb{N}\}$ est une suite de Blaschke portée par l'intervalle $[0, 1]$ telle que la distance hyperbolique $\chi(\alpha_n, \alpha_{n+1})$ tende vers zéro quand $n \rightarrow \infty$ [cf. [28] pour l'étude de telles suites].

Nous allons indiquer rapidement pourquoi dans ce cas $\widetilde{\bar{S}} \cap \mathcal{M}_\alpha \neq \widetilde{\bar{S}} \cap \mathcal{M}_\alpha$, en utilisant la décomposition de $\text{Sph}^\infty(D)$ en parts de Gleason qui sont soit des disques soit des points parts [20].

Tous les points de $\bar{S} \cap \mathcal{M}_1$ étant non tangentiels, ^{ce,} sont des points non parts.

On vérifie aussi que $\overline{[0, 1]} \cap \mathcal{M}_1 = \bar{S} \cap \mathcal{M}_1$. Mais si $\overline{[0, 1]} \cap \mathcal{M}_1$ coupe une part P elle la coupe suivant une infinité non dénombrable de points, donc toute fonction $\hat{F}$ de $H^\infty(D)$ nulle sur $\bar{S} \cap \mathcal{M}_1$ est identiquement nulle sur les parts coupées par $\overline{[0, 1]} \cap \mathcal{M}_1 = \bar{S} \cap \mathcal{M}_1$, donc sur leur adhérence ; or si par exemple une telle part P est telle que $\hat{H}^\infty(D)|_P$ soit isomorphe à $H^\infty(D)$, l'adhérence de P contient des points parts.

On en déduit que $\widetilde{\bar{S}} \cap \mathcal{M}_1$ contient des points parts alors que $\bar{S} \cap \mathcal{M}_1$ n'en contient pas. Donc $\widetilde{\bar{S}} \cap \mathcal{M}_1 \neq \bar{S} \cap \mathcal{M}_1$.

Je ne sais pas si dans ce cas $\widetilde{\bar{S}} \cap \mathcal{M}_1 = \tilde{S} \cap \mathcal{M}_1$.

Une hypothèse raisonnable est la suivante :

Si S est une suite de Blaschke dont les points s'accumulent en un point α de T alors $\widetilde{\bar{S}} \cap \mathcal{M}_1 = \tilde{S} \cap \mathcal{M}_1$ si et seulement si $\tilde{S} = \bar{S}$.

Pour terminer, nous allons voir que l'étude faite dans ce chapitre illustre la proposition 4 du chapitre III qui assure que si K_1 et K_2 sont deux fermés du spectre d'une algèbre uniforme tel que K_1 soit pic et K_2 soit clos, alors $I_{K_1} + I_{K_2} = I_{K_1 \cap K_2}$.

Nous allons montrer que l'hypothèse " K_2 clos" ne peut pas être enlevée et que le théorème peut être faux lorsque K_1 est pic et K_2 seulement fermé-Zariski.

En effet, considérons une suite de Blaschke S qui est union de deux suites d'interpolations, qui n'est pas d'interpolation et telle que $\bar{S} \cap T$ soit égal au point 1.

D'une part, $S = \tilde{S}$ et d'autre part, d'après le théorème 3 de ce chapitre, $H_{\{1\}}(K) \neq B(K)$.

Cela signifie, d'après ce que nous avons dit au début de la 4ème partie de ce chapitre, qu'il existe une fonction F de $H^\infty(D)$ telle que $\hat{F}$ soit nulle sur $\bar{S} \cap \mathcal{H}_1 = \tilde{S} \cap \mathcal{H}_1$ et telle que $F|_S$ ne soit pas dans $H_{\{1\}}(K)$, en d'autres termes, il n'existe pas de fonction G dans $H^\infty(D)$ telle que G soit nulle sur S (donc $\hat{G}$ nulle sur $\tilde{S}$) telle que $F - G$ soit dans $H_{\{1\}}(D)$, donc telle que $\hat{F} - \hat{G}$ soit nulle sur $\mathcal{H}_1$.

Dans l'algèbre $\hat{H}^\infty(D)$, $K_1 = \mathcal{H}_1$ est un ensemble pic et $K_2 = \bar{S} = \tilde{S}$ est fermé-Zariski.

$\hat{F}$ est nul sur $\mathcal{H}_1 \cap \bar{S}$ donc appartient à $I_{K_1 \cap K_2}$ et d'après ce qui précède elle ne peut pas s'écrire sous la forme $\hat{F} = \hat{F} - \hat{G} + \hat{G}$ où $\hat{G}$ est nulle sur $\bar{S}$ et $\hat{F} - \hat{G}$ nulle sur $\mathcal{H}_1$ donc $\hat{F}$ n'appartient pas à $I_{K_1} + I_{K_2}$.

D'où, dans ce cas où K_1 est un ensemble pic et K_2 fermé-Zariski, $I_{K_1 \cap K_2} \neq I_{K_1} + I_{K_2}$.

Bibliographie

- [1] E. AKUTOWICZ - L. CARLESON The analytic continuation of interpolatory functions. J. Anal. Math., 1959-60, pp. 223-247
- [2] A. BROWDER - J. WERMER A method for constructive Dirichlet algebras. Proc. Amer. Math. Soc., 1964, 15, pp. 546-552
- [3] L. BROWN - A. SHIELDS - K. ZELLER On absolutely convergent exponential sums. Trans. Amer. Math. Soc., 1960, 96, pp. 162-183
- [4] L. CARLESON Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem. Annals of Math., 1962, 76, pp. 547-559
- [5] E. COLLINGWOOD - A. LOHWATER The theory of cluster sets. Cambridge at the Univ. Press
- [6] J. DETRAZ Sous-algèbres d'algèbres de Banach. C. R. Acad. Sci. Paris, 1967, 264, pp. 187-189
- [7] J. DETRAZ Algèbres uniformes, ensembles pics. C. R. Acad. Sci. Paris, 1967, 264, pp. 235-237
- [8] J. DETRAZ Sous-algèbres de codimension 1 et dérivations dans les algèbres de Banach commutative. Studia Math., 1968, 30, pp. 79-82
- [9] J. DETRAZ Sous-algèbres de codimension finie d'une algèbre de Banach. C. R. Acad. Sci. Paris, 1968, 266, pp. 117-119
- [10] J. DETRAZ Algèbres de restrictions du disque. C. R. Acad. Sci. Paris, 1969, 268, pp. 853-856
- [11] J. DETRAZ Algèbres de restrictions du disque. C. R. Acad. Sci. Paris, 1969, 269, pp. 688-691
- [12] J. DETRAZ Etude du spectre d'algèbres de fonctions analytiques sur le disque unité. C. R. Acad. Sci. Paris, 1969, 269, pp. 833-835
- [13] R. DOUGLAS - W. RUDIN Approximation by inner functions. Pacific J. Math., 1969, 31, pp. 313-320
- [14] T. GAMELIN Embedding Riemann surfaces in maximal ideal spaces. J. Funct. Anal., 1968, 2, pp. 123-146
- [15] A. GLEASON A characterisation of maximal ideals. J. Anal. Math., 1967, 19, pp. 171-172

- [16] I. GLICKSBERG Measures orthogonal to algebras and sets of antisymmetry. Trans. Amer. Math. Soc., 1962, 105, pp. 415-435
- [17] A. HEARD - J. WELLS An interpolation problem for subalgebras of H^∞ . Pacific J. Math., 1969, 28, pp. 543-553
- [18] K. HOFFMAN Banach spaces of analytic functions. Prentice Hall
- [19] K. HOFFMAN Analytic functions and logmodular Banach algebras. Acta Math., 1962, 108, pp. 271-317
- [20] K. HOFFMAN Bounded analytic functions and Gleason parts. Ann. Math., 1967, 86, pp. 74-111
- [21] N. JACOBSON Schur's theorem on commutative matrices. Bull. Amer. Math. Soc., 1944, pp. 431-445
- [22] J.-P. KAHANE - W. ŻELAZKO A characterization of maximal ideals in commutative Banach algebras. Studia Math., 1968, 29, pp. 339-343
- [23] M. NAIMARK Normed rings. P. Nordhoff
- [24] R. PHELPS Lectures on Choquet's theorem. D. van Nostrand
- [25] J. P. ROSAY Sur un problème posé par W. Rudin. C. R. Acad. Sci. Paris, 1968, 267, pp. 922-925
- [26] J. P. ROSAY Spectre de certaines sous-algèbres de l'algèbre du disque. C. R. Acad. Sci. Paris, 1969, 268, pp. 222-223
- [27] J. P. ROSAY Séparation des points du spectre de $H^\infty(D)$ par les fonctions intérieures. Sémin. Anal. fonctionnelle de Grenoble, 1968-69
- [28] M. ROSENFELD - M. WEISS Bounded analytic functions tending radially to zero. Proc. London Math. Soc., 1968, 18, pp. 714-726
- [29] Z. SAWOŃ - A. WARZECHA On the general forms of subalgebras of codimension 1 of B-algebras with unit. Studia Math., 1968, 29, pp. 249-260
- [30] P. SAMUEL - O. ZARISKI Commutative algebra. Van Nostrand, vol. 1
- [31] N. VAROPOULOS On a problem of A. Beurling. J. Funct. Analysis, 1968, 2, pp. 24-30

